RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 dicembre 1909.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Nel caso della isotropia è facile vedere la forma che assumono le equazioni della ereditarietà per i corpi elastici. Riferendosi alle equazioni (III) della mia Nota: *Equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità* (1) si avrà che le equazioni stesse non debbono alterarsi cambiando verso a ciascuno degli assi coordinati. Osservando i cambiamenti di segno che in tal modo vengono ad assumere le t_{rs} e le γ_{rs}, si vede subito quali sono i termini che debbono eliminarsi nei secondi membri delle (III). Ma queste equazioni non debbono alterarsi scambiando gli assi fra loro, quindi dovremo avere

$$(1)\qquad t_{rr} = \mathrm{L}\theta(t) + 2\mathrm{K}\gamma_{rr}(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau)\,\theta(\tau) + 2\psi(t,\tau)\,\gamma_{rr}(\tau))\,d\tau$$

$$t_{rs} = h\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \chi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \quad r \gtrless s$$

$$\theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}\,.$$

Dando ora agli assi una orientazione arbitraria, le equazioni debbono pure rimanere inalterate, e di qui si conclude che $\mathrm{K} = h$, $\psi = \chi$, e perciò

$$(2)\qquad t_{rs} = \mathrm{K}\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \quad r \gtrless s\ (2)\,.$$

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 7 novembre 1909.

(2) Cfr. Boltzmann, *Zur theorie der elastischen Nachwirkung.* Pogg. Ann. Erg. Bd. 7, S. 624, 1876.

Nel caso delle omogeneità (che noi appunto considereremo) L e K saranno costanti e φ e ψ indipendenti da x, y, z. Ammetteremo L e K dello stesso segno.

Le equazioni integro-differenziali nelle componenti degli spostamenti u, v, w resulteranno quindi

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{K}\Delta^2 u(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial x} + \\ \quad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right]d\tau = \varrho \mathrm{X}(t) \\ \mathrm{K}\Delta^2 v(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial y} + \\ \quad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y}\right]d\tau = \varrho \mathrm{Y}(t) \\ \mathrm{K}\Delta^2 w(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial z} + \\ \quad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z}\right]d\tau = \varrho \mathrm{Z}(t)\,. \end{cases}$$

2. Dalle equazioni precedenti segue facilmente

$$(4)\quad (\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,\Delta^2\theta(t) + \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau))\,\Delta^2\theta(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}\,,$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{K}\Delta^2\varpi_1(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\varpi_1(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial z} \\ \mathrm{K}\Delta^2\varpi_2(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\varpi_2(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial z} - \frac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial x} \\ \mathrm{K}\Delta^2\varpi_3(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\varpi_3(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial x} - \frac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial y} \end{cases}$$

ove

$$\varpi_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\quad,\quad \varpi_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\quad,\quad \varpi_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Quindi, mediante la risoluzione di equazioni integrali, potremo calcolare $\Delta^2\theta(t)$, $\Delta^2\varpi_1(t)$, $\Delta^2\varpi_2(t)$, $\Delta^2\varpi_3(t)$.

3. Per esprimere con semplicità la risoluzione di queste equazioni integrali e di altre analoghe, che avremo occasione di considerare in seguito, rappresentiamo l'operazione con cui si passa dalla f alla φ

$$(6)\quad \mathrm{K}f(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \varphi(t)$$

mediante

$$(\mathrm{I})\quad \varphi = \mathrm{A}_1 f$$

e inversamente scriviamo

$$(I') \qquad f = \mathbf{A}_1^{-1}\varphi .$$

Quest'ultima operazione consiste nella risoluzione della equazione integrale precedente, la quale si fa colle regole note che ho dato nei miei lavori sulla risoluzione delle equazioni integrali.

Analogamente l'operazione corrispondente a

$$(7) \qquad (\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,f(t)+\int_{t_0}^{t}[\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau)]\,f(\tau)\,d\tau=\varphi(t)$$

denotiamola con $\mathbf{A}_2$, cioè scriviamo

$$(II) \qquad \varphi = \mathbf{A}_2 f \quad , \quad f = \mathbf{A}_2^{-1}\varphi .$$

4. Le (4) e (5) allora si scriveranno

$$(4') \qquad \mathbf{A}_2\Delta^2\theta = \frac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}$$

$$(5') \qquad \begin{cases} \mathbf{A}_1\Delta^2\varpi_1 = \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial y}-\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial z} \\ \mathbf{A}_1\Delta^2\varpi_2 = \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial z}-\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial x} \\ \mathbf{A}_1\Delta^2\varpi_3 = \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial x}-\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial y} \end{cases}$$

e quindi

$$(4'') \qquad \Delta^2\theta = \mathbf{A}_2^{-1}\left(\frac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}\right)$$

$$(5'') \qquad \begin{cases} \Delta^2\varpi_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial y}-\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial z}\right) \\ \Delta^2\varpi_2 = \mathbf{A}_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial z}-\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial x}\right) \\ \Delta^2\varpi_3 = \mathbf{A}_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial x}-\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Dalle (3) segue

$$\mathrm{K}\Delta^4 u(t)+\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^4 u(\tau)\,d\tau = \Delta^2(\varrho \mathrm{X}) - \\ -(\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial\Delta^2\theta(t)}{\partial x}-\int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Delta^2\theta(\tau)}{\partial x}\,d\tau$$

ossia

$$\mathbf{A}_1\Delta^4 u = \Delta^2(\varrho \mathrm{X})-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}\right)+\mathbf{A}_1\frac{\partial\Delta^2\theta}{\partial x}$$

e come questa se ne hanno altre due analoghe. Da esse, tenendo conto della (4″), segue

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta^4 u = \mathrm{A}_1^{-1}\Delta^2(\varrho \mathrm{X}) + (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}\right) \\ \Delta^4 v = \mathrm{A}_1^{-1}\Delta^2(\varrho \mathrm{Y}) + (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}\right) \\ \Delta^4 w = \mathrm{A}_1^{-1}\Delta^2(\varrho \mathrm{Z}) + (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{X})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Y})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho \mathrm{Z})}{\partial z}\right). \end{cases}$$

È dunque possibile trasformare le equazioni integro-differenziali (3) nelle equazioni differenziali precedenti in cui i secondi membri sono funzioni note.

Nel caso in cui manchino le forze di massa, le (4″), (5″), (8) si riducono a

$$\Delta^2\theta = \Delta^2\varpi_1 = \Delta^2\varpi_2 = \Delta^2\varpi_3 = \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0\,.$$

Sotto un certo aspetto quindi la forma integro-differenziale delle equazioni dell'elasticità nel caso ereditario non è che apparente, quando si tratta di corpi isotropi. Le condizioni che legano fra loro le u, v, w conservano però sempre la forma integro-differenziale e così pure le condizioni al contorno, quando si suppongono date le tensioni.

5. Le relazioni corrispondenti alle (1) e (2) per le equazioni *aggiunte* saranno

$$(1')\quad t'_{rr} = \mathrm{L}\theta'(t) + 2\mathrm{K}\gamma'_{rr}(t) + \int_t^{\mathrm{T}} (\varphi(\tau, t)\,\theta'(\tau) + 2\psi(\tau, t)\,\gamma'_{rr}(\tau))\,d\tau$$

$$(2')\quad t'_{rs} = \mathrm{K}\gamma_{rs}(t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\,\gamma'_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \qquad r \gtrless s$$

e le *equazioni aggiunte* resulteranno, posto $\theta' = \gamma'_{11} + \gamma'_{22} + \gamma'_{33}$,

$$(3')\quad \begin{cases} \mathrm{K}\Delta^2 u'(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial x} + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^{\mathrm{T}} \left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 u'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\frac{\partial\theta'(\tau)}{\partial x}\right) d\tau = \varrho \mathrm{X}' \\ \mathrm{K}\Delta^2 v'(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial y} + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^{\mathrm{T}} \left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 v'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\frac{\partial\theta'(\tau)}{\partial y}\right) d\tau = \varrho \mathrm{Y}' \\ \mathrm{K}\Delta^2 w'(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial z} + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^{\mathrm{T}} \left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 w'(t) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\frac{\partial\theta'(\tau)}{\partial z}\right) d\tau = \varrho \mathrm{Z}'\,. \end{cases}$$

Se si suppongono nulle X', Y', Z', resulterà evidentemente, anche per le equazioni aggiunte,

$$\Delta^2\theta' = \Delta^2\varpi_1' = \Delta^2\varpi_2' = \Delta^2\varpi_3' = \Delta^4 u' = \Delta^4 v' = \Delta^4 w' = 0$$

in cui

$$\varpi_1' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \quad , \quad \varpi_2' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \quad , \quad \varpi_3' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} .$$

6. Sempre supponendo $X' = Y' = Z' = 0$, avremo immediatamente delle soluzioni particolari delle (3')

1°) Se F è armonica, avremo la soluzione

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad v' = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad w' = \frac{\partial F}{\partial z} ; \tag{9}$$

2°) Se F_1, F_2, F_3 sono armoniche potrà ottenersi la soluzione

$$u' = \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad , \quad v' = \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad , \quad w' = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} ; \tag{10}$$

3°) Se Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono biarmoniche e le tre derivate parziali di

$$\Delta^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)$$

rispetto ad x, y, z sono indipendenti da t, vi sarà la soluzione

$$\begin{cases} u = \alpha(T, t)\,\Delta^2\Phi_1 + \beta(T, t)\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \\ v = \alpha(T, t)\,\Delta^2\Phi_2 + \beta(T, t)\,\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \\ w = \alpha(T, t)\,\Delta^2\Phi_3 + \beta(T, t)\,\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{11}$$

quando si prendano α e β tali che sia soddisfatta la condizione integrale

$$(L + 2K)\,\beta(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t)]\,\beta(T, \tau)\,d\tau + \tag{12}$$

$$+ (L + K)\,\alpha(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\,\alpha(T, t)\,d\tau = 0.$$

7. Prendiamo ora $F = \frac{1}{r}$, in cui r denota la distanza di un polo O, di coordinate ξ, η, ζ, dal punto generico x, y, z e consideriamo le (9) come soluzioni delle equazioni aggiunte con i secondi membri nulli. Le γ'_{rs} sa-

ranno indipendenti da t, e sarà $\theta' = 0$, quindi avremo

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

$$t'_{11} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ t'_{22} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\ ,\ t'_{33} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

$$t'_{23} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\ ,\ t'_{31} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\ ,\ t'_{12} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\mathrm{X}'_\sigma = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ \mathrm{Y}'_\sigma = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \mathrm{Z}'_\sigma = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

in cui si è posto

$$\mathrm{M}(\mathrm{T}, t) = \mathrm{K} + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, d\tau .$$

Queste formule differiscono da quelle che si hanno impiegando la prima soluzione ausiliaria del Betti, in quanto che alla costante K è sostituita M che è funzione di T e t.

Applicando la formula (1) della Nota precedente ed escludendo il polo O, interno ad S, mediante una sfera avente il centro O, facendo infine tendere indefinitamente a zero il raggio della sfera, si trova al limite

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma(t)\, u'\, d\sigma + \int_\mathrm{S} \Sigma \varrho \mathrm{X}(t)\, u'\, d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma\, u(t)\, d\sigma \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left\{ \frac{16}{3}\pi \mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\, \theta(\xi, \eta, \zeta, t) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\pi (t_{11}(\xi, \eta, \zeta, t) + t_{22}(\xi, \eta, \zeta, t) + t_{33}(\xi, \eta, \zeta, t)) \right\} dt .$$

Derivando ambo i membri rispetto a T, con facili trasformazioni di integrali, si ha

$$(13) \qquad \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\sigma + \int_\mathrm{S} \Sigma \varrho \mathrm{X} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{A}_1 u \,.\, \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\sigma = 4\pi\, \mathbf{A}_2\, \theta$$

o anche

$$(13') \qquad \int_\sigma \Sigma \mathbf{A}_2^{-1} \mathrm{X}_\sigma \,.\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\sigma + \int_\mathrm{S} \Sigma \mathbf{A}_2^{-1}(\varrho \mathrm{X}) \,.\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\mathrm{S} -$$

$$- \int_\sigma \Sigma \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 u \,.\, \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\sigma = 4\pi\theta .$$

8. Se nelle (10) prendiamo $F_1 = \frac{1}{r}$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, con procedimento del tutto analogo, si giunge alla formula

$$(14)\quad \int_\sigma \left(Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\sigma + \int_S \left(\varrho Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \varrho Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS -$$

$$- \int_\sigma \Big\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos ny \right) \mathbf{A}_1 u +$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos nz \right) \mathbf{A}_1 v +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos ny + 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos nz \right) \mathbf{A}_1 w \Big\} d\sigma =$$

$$= 4\pi \mathbf{A}_1 \varpi_1(\xi, \eta, \zeta, t),$$

che si trasforma nell'altra

$$(14')\quad \int_\sigma \left(\mathbf{A}_1^{-1} Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1} Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\sigma + \int_S \left(\mathbf{A}_1^{-1}(\varrho Z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1}(\varrho Y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS -$$

$$- \int_\sigma \Big\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos ny \right) u +$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos nz \right) v +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos ny + 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos nz \right) w \Big\} d\sigma =$$

$$= 4\pi \varpi_1(\xi, \eta, \zeta, t).$$

Come questa formula se ne hanno altre due analoghe.

9. Confrontando le varie formule che abbiamo ora trovate colle ordinarie *equazioni del Betti* [1] relative all'equilibrio elastico, troviamo che esse hanno la stessa forma di queste, soltanto le componenti degli spostamenti, delle rotazioni, delle forze e la dilatazione vanno nelle prime assoggettate alle operazioni funzionali $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ o alle loro inverse. Bastano dunque le ordinarie formule del Betti in unione con queste operazioni funzionali

[1] E. Betti, *Teoria della elasticità*. Nuovo Cimento, 1872-73.

per trattare le equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.

Chiamiamo $\mathbf{A}_1 u$, $\mathbf{A}_1 v$, $\mathbf{A}_1 w$; $\mathbf{A}_1 \varpi_1$, $\mathbf{A}_1 \varpi_2$, $\mathbf{A}_1 \varpi_3$; $\mathbf{A}_2 \theta$ respettivamente gli *pseudospostamenti*, le *pseudorotazioni* e la *pseudodilatazione*, allora la (13), la (14) e le sue analoghe potranno interpretarsi mediante il teorema: *Per passare dal caso della non ereditarietà a quello della ereditarietà, nel caso di corpi solidi elastici isotropi, basterà sostituire nelle formule del Betti, relative all'equilibrio elastico, agli spostamenti, alle rotazioni ed alla dilatazione, respettivamente gli pseudospostamenti, le pseudorotazioni e la pseudodilatazione.*

10. Prendiamo nelle formule (11), analogamente a quanto fa il Somigliana (1), nel caso non ereditario,

$$\Phi_1 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0 ,$$

otterremo allora

$$u' = \alpha \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \quad , \quad v' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \quad , \quad w' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}$$

e se scegliamo $\alpha(\mathrm{T}, t)$ in modo che

$$\mathrm{K}\alpha(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \alpha(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau = 1 \tag{15}$$

e poniamo

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}, t) = \mathrm{K}\beta(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \beta(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau . \tag{16}$$

avremo

$$\mathrm{X}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx \right)$$

$$\mathrm{Y}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right)$$

$$\mathrm{Z}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right) .$$

Ciò premesso applichiamo la (1) della Nota precedente e, come di solito, escludiamo il polo O con una sfera il cui raggio si faccia tendere a zero indefinitamente. Al limite avremo:

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u' d\sigma + \int_\mathrm{S} \Sigma \varrho \mathrm{X} u' d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma u\, d\sigma \right\} = -4\pi \int_{t_0}^{\mathrm{T}} u(\xi, \eta, \zeta, t)\, dt ,$$

(1) Somigliana, *Sulle equazioni dell'elasticità*. Annali di Matematica, ser. II, t. XVI.

e derivando rispetto a T,

$$(17) \qquad -4\pi u(\xi,\eta,\zeta,\mathrm{T}) =$$
$$= \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u' d\sigma + \int_\mathrm{S} \Sigma \varrho \mathrm{X} u' d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma u d\sigma \right\}.$$

11. Riprendiamo ora l'equazione (6), moltiplichiamone ambo i membri per $\alpha(\mathrm{T},t)$ e integriamo fra t_0 e T. Con ben note trasformazioni, e tenendo conto della (15), si avrà

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T},t)\,f(t)\,dt + \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,dt \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(t) \left\{ \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T},t) + \int_t^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},\tau)\,\psi(\tau,t)\,d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(t)\,dt,$$

quindi derivando e tenendo presente la (I')

$$(18) \qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt = f(\mathrm{T}) = \mathbf{A}_1^{-1}\varphi(\mathrm{T}).$$

Ma dalla (12) segue, tenendo conto della (15),

$$(15') \qquad (\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,(\alpha(\mathrm{T},t)+\beta(\mathrm{T},t)) +$$
$$+ \int_t^{\mathrm{T}} (\varphi(\tau,t) + 2\psi(\tau,t))\,(\alpha(\mathrm{T},\tau)+\beta(\mathrm{T},\tau))\,d\tau = 1,$$

dunque, seguendo un procedimento analogo a quello ora impiegato e servendosi della notazione (II), potremo scrivere

$$\frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} (\alpha(\mathrm{T},t)+\beta(\mathrm{T},t))\,\varphi(t)\,dt = \mathbf{A}_2^{-1}\varphi(\mathrm{T}),$$

d'onde per la (18)

$$(18') \qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\varphi(\mathrm{T}).$$

Dalle (16) e (6) poi segue

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T},t)\,f(t)\,dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t) \left\{ \mathrm{K}f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau \right\} dt$$
$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt,$$

quindi applicando la (18') e la (I)

$$(18'') \qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\mathbf{A}_1 f(t) =$$
$$= \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 f(t) - f(t) = (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\,f(t).$$

Riassumendo le formule (18), (18′), (18″) si ha dunque

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,\mathrm{F}(t)\,dt = \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{T}) \\ \dfrac{d}{d\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t)\,\mathrm{F}(t)\,dt = (\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})\,\mathrm{F}(\mathrm{T}) \\ \dfrac{d}{d\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T},t)\,\mathrm{F}(t)\,dt = (\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1-1)\,\mathrm{F}(\mathrm{T}) \end{cases}$$

in cui $\mathrm{F}(t)$ è una funzione arbitraria.

12. Possiamo ora applicare le (III) per eseguire le derivate rispetto a T che compariscono nella formula (17), e questa allora si scriverà

$$\begin{aligned}(17')\quad -4\pi u(\xi,\eta,\zeta,t) = \int_\sigma \Big\{ &\frac{1}{r}\mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{X}_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})\,\mathrm{X}_\sigma + \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})\,\mathrm{Y}_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})\,\mathrm{Z}_\sigma \Big\}\,d\sigma + \\ +\int_\mathrm{S} \Big\{ &\frac{1}{r}\mathrm{A}_1^{-1}(\varrho\mathrm{X}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})(\varrho\mathrm{X}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})(\varrho\mathrm{Y}) \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(\mathrm{A}_2^{-1}-\mathrm{A}_1^{-1})(\varrho\mathrm{Z}) \Big\}\,d\mathrm{S} - \\ -\int_\sigma \Big\{ &\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}u + \Big(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos nx\Big)(\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1-1)\,u + \\ +\Big(&\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos nx - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\Big)v + \Big(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - 2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\Big)(\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1-1)\,v + \\ &+\Big(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos nx - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\Big)w + \\ &+\Big(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} - 2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz\Big)(\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1-1)\,w \Big\}\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

Come la formula precedente ci dà u, così possono ottenersi altre due formule che esprimono analogamente v e w. Si vede dunque che il caso ereditario della elasticità può trattarsi pur lasciando completamente indeterminate le funzioni $\varphi(t,\tau)$, $\psi(t,\tau)$ ed a questo proposito può ripetersi quando avemmo occasione già di dire nel caso della elettrodinamica [1].

Fisica matematica. — *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità.* Nota del Socio Carlo Somigliana.

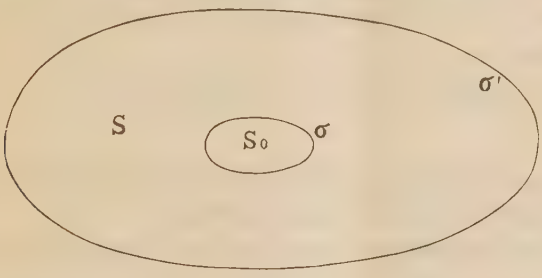
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] *Sulle equaz. della elettrodinamica.* § 3, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XVIII.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota I del Corrispondente E. Almansi.

1. Una massa liquida M, di densità ϱ, occupa interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ di un solido immobile S_0, ed un'altra superficie chiusa, pure fissa, σ'.

La massa M è supposta in movimento. Su tale movimento non faremo alcuna ipotesi restrittiva: così non escluderemo l'esistenza di vortici, nè di superficie su cui la velocità sia discontinua.



Ammetteremo che sugli elementi di M non agiscano forze di massa.

Noi vogliamo esaminare l'azione esercitata dalla massa liquida sul corpo S_0. Perciò, detta p la pressione in un punto qualunque di M, prenderemo a considerare la quantità

$$A = \int_\sigma p \lambda \, d\sigma, \tag{1}$$

ove λ rappresenti una funzione nota, definita nei punti di σ, che soddisfi la condizione

$$\int_\sigma \lambda \, d\sigma = 0 . \tag{2}$$

Riferiti i punti dello spazio ad un sistema di assi fissi $(x\,y\,z)$, e detti α, β, γ i coseni direttori della normale a σ che penetra in S, facendo λ successivamente uguale a

$$-\alpha \ , \ -\beta \ , \ -\gamma ,$$
$$-\gamma y + \beta z \ , \ -\alpha z + \gamma x \ , \ -\beta x + \alpha y .$$

i corrispondenti valori di A ci daranno le componenti della forza e della

coppia resultanti delle pressioni $pd\sigma$ esercitate dalla massa liquida in moto sugli elementi di σ.

Quello che noi precisamente ci proponiamo si è trovare un'espressione di A in cui, oltre a quantità indipendenti dal movimento di M, figurino solo le componenti u, v, w delle velocità delle particelle liquide; non, dunque, la pressione p, nè le derivate di u, v, w rispetto al tempo: in modo che, conoscendo *al tempo* t il movimento della massa liquida (velocità delle singole particelle) noi possiamo conoscere il valore di A *relativo a quello istante* [1].

Nel caso particolare che manchino i vortici, e che il moto sia continuo in tutto lo spazio S (un tal movimento è possibile purchè lo spazio S non sia semplicemente connesso; ed è un movimento stazionario), la funzione $p + \frac{1}{2}\varrho V^2$, ove V denota la grandezza della velocità, ha un valore costante in tutta la massa liquida; onde sarà $p = -\frac{1}{2}\varrho V^2 + \text{cost.}$, e per le formule (1) e (2):

$$A = -\tfrac{1}{2}\varrho \int_\sigma V^2 \lambda \, d\sigma. \tag{3}$$

In questo caso particolare il problema che ci siamo proposti è dunque risoluto. Noi vogliamo risolverlo nel caso generale.

2. A tal fine introdurremo una funzione regolare $\varphi(x, y, z)$ armonica nello spazio S $\left(\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\right)$, che nei punti di σ e σ' soddisfi rispettivamente le condizioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda \ , \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \tag{4}$$

n denotando, nei punti di σ', come in quelli di σ, la normale interna rispetto ad S: condizioni che, in virtù della formula (2), sono compatibili coll'altra che la funzione φ sia regolare ed armonica in S; e determinano φ a meno di una costante.

Dividiamo lo spazio S in un certo numero di spazî T, in ciascuno dei quali, al tempo t, le componenti di velocità siano continue; e diciamo τ la superficie che limita uno spazio T. All'insieme delle superficie τ apparterranno σ e σ'.

Consideriamo, per ognuna delle τ, l'integrale

$$L = \int_\tau p \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\tau,$$

[1] Sul problema della resistenza che incontra, in un fluido indefinito, un solido animato da un movimento traslatorio uniforme, vedansi le interessanti ricerche del Levi-Civita e del Cisotti (Cito la Memoria più recente: Cisotti, *Sul moto di un solido in un canale*. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. XXVIII, a. 1909).

ove n denoti, in un punto qualunque della superficie τ, la normale diretta verso l'interno dello spazio T che essa limita. Sarà allora

$$A = \Sigma L,$$

la somma intendendosi estesa a tutte le superficie chiuse τ (ossia a tutti gli spazî T). E infatti, se $d\theta$ è un elemento di superficie che separa due spazî T, vi saranno due superficie τ a cui appartiene $d\theta$, e per conseguenza, in ΣL, due elementi $p\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\tau$, nei quali $d\tau$ coincide con $d\theta$. Ora essi si elidono, giacchè dalle due parti di $d\theta$ la pressione p ha lo stesso valore, mentre $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ha valori uguali e contrarî. Rimangono così due integrali, come L, estesi a σ' e σ, di cui, per le formule (4), il primo è nullo, il secondo è uguale ad A.

Si tratta di trasformare gl'integrali L. Noi potremo intanto scrivere (chiamando α, β, γ, in tutti i punti di τ, i coseni direttori di n)

$$L = \int_\tau p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma\right)d\tau,$$

ovvero, trasformando l'integrale esteso a τ in un integrale esteso allo spazio T racchiuso da τ, e tenendo presente l'equazione $\Delta\varphi = 0$

$$(5)\qquad L = -\int_T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dT.$$

3. Ora ricordiamo le equazioni dell'idrodinamica. Posto

$$U = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \tfrac{1}{2}V^2,$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\quad,\quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\quad,\quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f = v\zeta - w\eta\quad,\quad g = w\xi - u\zeta\quad,\quad h = u\eta - v\xi,$$

sarà

$$(6)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} - f\right),\ \text{ecc.}\ (^1).$$

(1) Ossia: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\varrho\frac{du}{dt}$, ecc. Attribuiamo a $\frac{du}{dt}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ i soliti significati, intendiamo cioè che la derivata $\frac{du}{dt}$ sia ottenuta *seguendo una particella nel suo movimento*, la $\frac{\partial u}{\partial t}$ *fissando un punto dello spazio*; onde si ha la nota formula:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} - f.$$

Dovrà poi essere, per l'incompressibilità del liquido,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{7}$$

E finalmente, nei punti di σ e σ',

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

Sostituiamo nella formula (5) a $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, le loro espressioni date dalle equazioni (6). Avremo

$$\mathrm{L}=\varrho(\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''), \tag{8}$$

ove

$$\mathrm{L}'=\int_{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{T},$$

$$\mathrm{L}''=\int_{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{T},$$

$$\mathrm{L}'''=-\int_{\mathrm{T}}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+h\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)d\mathrm{T}.$$

L'integrale L''', ponendo $\mathrm{D}=f\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+h\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, ossia

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} n & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

può scriversi

$$\mathrm{L}'''=-\int_{\mathrm{T}}\mathrm{D}\,d\mathrm{T}. \tag{9}$$

Quanto ad L'' avremo, integrando per parti, e tenendo ancora presente l'equazione $\Delta\varphi=0$:

$$\mathrm{L}''=-\int_{\tau}\mathrm{U}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\tau. \tag{10}$$

Rimane a trasformarsi l'integrale L'.

4. Poichè in un punto qualunque dello spazio S, la funzione φ non varia col tempo, sarà $\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$, ecc.; quindi

$$\mathrm{L}'=\int_{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{T},$$

ovvero

$$L' = \int_T \frac{\partial Q}{\partial t} dT ,$$

essendo

$$Q = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} . \tag{11}$$

Ma (v. nota al § 3):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} - \left(u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + w \frac{\partial Q}{\partial z} \right) ;$$

quindi:

$$L' = \int_T \frac{dQ}{dt} dT - \int_T \left(u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + w \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dT . \tag{12}$$

Noi possiamo trasformare l'ultimo termine integrando per parti e tenendo presente la condizione d'incompressibilità (7). Se poniamo

$$N = u\alpha + v\beta + w\gamma ,$$

avremo:

$$L' = \int_T \frac{dQ}{dt} dT + \int_\tau Q N d\tau . \tag{13}$$

5. Sostituiamo ora, nella formula (8), ad L', L'', L''', le loro espressioni (13), (10), (9). Posto

$$E = QN - U \frac{\partial \varphi}{\partial n} , \tag{14}$$

sarà

$$L = \varrho \left(\int_T \frac{dQ}{dt} dT + \int_\tau E d\tau - \int_T D dT \right) .$$

E introducendo questo valore di L nella formula $A = \Sigma L$:

$$A = \varrho \left(R + \Sigma \int_\tau E d\tau - \Sigma \int_T D dT \right) , \tag{15}$$

ove

$$R = \Sigma \int_T \frac{dQ}{dt} dT .$$

Dimostreremo che *il termine* R *è identicamente nullo*: avremo così ottenuta un'espressione di A che soddisfa alle condizioni richieste.

Perciò osserviamo che si ha:

$$\int_T \frac{dQ}{dt} dT = \frac{d}{dt} \int_T Q dT ,$$

purchè s'intenda che negl'istanti successivi a t, T *rappresenti lo spazio* (in generale variabile) *occupato dalla massa che al tempo t occupava lo spazio rappresentato colla stessa lettera* [1]. Onde sarà

$$R = \Sigma \frac{d}{dt} \int_T Q\,dT = \frac{d}{dt} \Sigma \int_T Q\,dT = \frac{dR_0}{dt},$$

essendo

$$R_0 = \Sigma \int_T Q\,dT.$$

Sostituendo a Q la sua espressione, data dalla formula (11), ed eseguendo una trasformazione analoga a quella eseguita su l'ultimo termine dell'equazione (12), avremo

$$\int_T Q\,dT = -\int_\tau \varphi N\,d\tau,$$

quindi

$$R_0 = -\Sigma \int_\tau \varphi N\,d\tau.$$

Ora, la quantità R_0 è nulla (al tempo t, e negli istanti successivi, in cui s'intende che le τ rappresentino sempre le superficie degli spazî T). Se infatti $d\theta$ è un elemento di superficie che separa due spazî T, i due elementi $\varphi N\,d\tau$ in cui $d\tau$ coincide con $d\theta$ (v. § 2) si elidono, poichè dalle due parti di $d\theta$ φ ha lo stesso valore, mentre la componente normale N della velocità ha valori uguali e contrarii. Inoltre sulla superficie σ e σ' N è uguale a zero. Dunque $R_0 = 0$; ed $R = \frac{dR_0}{dt} = 0$, c. v. d.

Facendo $R = 0$, e scrivendo $\int_S D\,dS$, invece che $\Sigma \int_T D\,dT$, la formula (15) diventa

$$A = \varrho \left(\Sigma \int_\tau E\,d\tau - \int_S D\,dS \right), \tag{16}$$

nella qual formula, per ciò che riguarda il movimento della massa liquida, figurano solo quantità espresse mediante le componenti di velocità u, v, w.

6. Possiamo dare ad A un'altra forma. Diciamo ω l'insieme delle superficie su cui, al tempo t, il moto è discontinuo. Potrà darsi che le superficie ω insieme a σ e σ', non dividano lo spazio S in più spazî T [2]: noi supporremo allora di completarle con altre superficie ω_0.

(1) Noi ammettiamo che per ciascuna delle masse che occupano gli spazî T, il movimento, continuo al tempo t, si conservi sempre tale.

(2) Le ω potranno essere, per es., delle superficie aperte, che non toccano nè σ nè σ'.

L'insieme della superficie τ che limitano gli spazî T sarà costituito delle superficie ω ed ω_0 contate due volte, di σ e σ'.

Sulle superficie ω ed ω_0 fisseremo una faccia positiva; e diremo E il valore di questa quantità sulla detta faccia, E′ il suo valore sulla faccia opposta. Sulle superficie σ e σ', E ha un valore unico: sopra σ si ha $N = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda$, quindi $E = -U\lambda$; sopra σ', $N = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, quindi $E = 0$. Onde sarà:

$$\Sigma \int_\tau E d\tau = \int_\omega (E + E') d\omega + \int_{\omega_0} (E + E') d\omega_0 - \int_\sigma U\lambda d\sigma;$$

ovvero, posto $H = E + E'$:

$$\Sigma \int_\tau E d\tau = \int_\omega H d\omega + \int_{\omega_0} H d\omega_0 - \int_\sigma U\lambda d\sigma.$$

Se intendiamo che $Q, U, N, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ rappresentino i valori di queste quantità sulle faccie positive di ω ed ω_0, Q′ ed U′ i valori delle prime due sulle faccie negative, si avrà, per la formula (14),

$$H = (Q - Q') N - (U - U') \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

avendo N e $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, sulle due faccie, valori uguali e contrarî.

Ma sulle superficie ω_0, ove il moto è continuo, sarà $Q = Q'$, $U = U'$, quindi $H = 0$. Per conseguenza:

$$\Sigma \int_\tau E d\tau = \int_\omega H d\omega - \int_\sigma U\lambda d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (16):

$$A = \varrho \left(- \int_\sigma U\lambda d\sigma + \int_\omega H d\omega - \int_S D dS \right).$$

Noi possiamo porre:

$$A' = -\varrho \int_\sigma U\lambda d\sigma \quad , \quad A'' = \varrho \int_\omega H d\omega \quad , \quad A''' = -\varrho \int_S D dS,$$

ed avremo:

$$A = A' + A'' + A'''.$$

L'azione A si presenta pertanto decomposta in tre parti, la prima delle quali possiamo attribuire *alla velocità delle particelle liquide che sono a*

contatto colla superficie σ *di* S_0 ($U = \frac{1}{2} V^2$); la seconda *alle discontinuità del movimento*; la terza (che si annulla con D, quando $\xi = \eta = \zeta = 0$) *ai moti vorticosi.*

Se mancano i vortici, e il movimento è continuo in tutto lo spazio S, sarà $A = A'$: si ricade così nella formula (3).

Chimica vegetale. — *Sulla formazione dei glucosidi per mezzo delle piante.* Nota del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

Dalle nostre precedenti esperienze [1] è risultato che inoculando ad alcune piante (mais, giacinti) dei glucosidi, questi vengono scissi in gran parte nell'interno della pianta in modo che si ritrovano, allo stato libero, le sostanze aromatiche che entrano nella loro costituzione. Reciprocamente, inoculando o facendo assorbire in altro modo alcune sostanze aromatiche, si ritrova poi oltre alla sostanza inalterata, un composto che per azione della emulsina si scinde liberando nuove quantità della sostanza introdotta. Abbiamo quindi supposto che le sostanze aromatiche assorbite dalle piante si combinassero in modo da dar origine a dei glucosidi. Di ciò fu data la dimostrazione rigorosa inoculando nel mais la saligenina; siamo riusciti cioè ad isolare dalle piante così trattate il glucoside formatosi, che fu riconosciuto identico alla salicina. Inoltre abbiamo osservato che una gran parte della sostanza introdotta viene distrutta per ossidazione.

Poichè era logico supporre che i fatti osservati fossero dovuti ad azione di enzimi, abbiamo pensato che tali processi dovessero compiersi non soltanto nelle piante viventi, ma ancora nelle poltiglie ottenute triturando le piante e contenenti quindi tutti i principî degli individui originarî. Fu per ciò iniziata, su queste basi, una nuova serie di esperienze, le quali vengono a confermare la nostra supposizione. Ci limitiamo, per ora, alla esposizione delle nostre osservazioni, soprattutto dal lato qualitativo, non potendoci ancòra autorizzare le esperienze eseguite, sebbene numerose, a conclusioni definitive di misura.

Le prove vennero eseguite colle seguenti sostanze: salicina, saligenina, pirocatechina, idrochinone e benzalcianidrina. Si adoperarono piante di mais. Queste venivano ridotte a poltiglia finissima; si introducevano uno o due chilogrammi della massa in un pallone e si aggiungeva la sostanza sciolta in acqua. Il tutto veniva lasciato in riposo per circa due mesi. Come antisettico si usò il toluolo.

[1] Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, serie 6ª, tomo V, pag. 29 (1907-08); serie 6ª, tomo VI, pag. 109 (1908-09). Questi Rendiconti, 18, 1, 419 (1909).

Salicina. — La ricerca conduce, salvo la misura, a risultati analoghi a quelli ottenuti colle piante vive. Infatti, soltanto una parte del glucoside si ritrova inalterata nella massa; un'altra parte si scinde nei componenti. Facendo un estratto acquoso della poltiglia, estraendo con etere sino ad esaurimento, il liquido ed aggiungendo a questo, dopo aver eliminato l'etere completamente, un poco di emulsina, si estrae poi una quantità di saligenina equivalente dal 3 al 12 per cento circa del glucoside adoperato.

In alcune prove si unì alla salicina un eccesso di glucosio; ma sembra che esso non influisca sulla quantità di sostanza decomposta. Tutte le esperienze si fecero poi tanto al buio che alla luce. Non sappiamo con certezza l'influenza di queste condizioni: in varî casi, però, l'idrolisi si spinse maggiormente al buio.

Come avviene nelle piante viventi, anche qui, la totalità della sostanza estratta e inferiore alla quantità corrispondente di sostanza introdotta. Una parte va probabilmente perduta per ossidazione. Si ebbero infatti, in qualche caso, indizî della presenza di acido salicilico. Le perdite sono però, nelle esperienze attuali, assai inferiori che in quelle colle piante vive aggirandosi, in generale, intorno ad un terzo della sostanza totale.

Parallelamente alle esperienze menzionate, ne abbiamo eseguite altre per studiare il contegno della poltiglia del mais in confronto coll'emulsina. All'infuori delle diminuzioni, che in questo caso non avvengono, non abbiamo, per il resto, osservate differenze che meritino speciale rilievo.

Saligenina. — Con questa sostanza si fecero esperienze analoghe a quelle esposte per la salicina. I risultati qualitativi furono uguali a quelli ottenuti colle piante vive. In tutte le prove eseguite si trovò cioè che dopo aver completamente esaurito con etere l'estratto acquoso della poltiglia. per azione dell'emulsina si mette in libertà dell'altra saligenina; il che significa che una parte di essa si combina dando origine ad un glucoside. La quantità di sostanza combinata è però assai piccola; in generale 0,3 a 0,4 per cento della sostanza adoperata. L'aggiunta di glucosio non pare avere influenza sull'intensità del processo sintetico e, nella maggior parte dei casi, neppure la luce. Soltanto in una prova alla luce la saligenina combinata raggiunse l'uno e mezzo per cento della quantità adoperata mentre la prova parallela al buio ne conteneva soltanto traccie.

Anche in queste esperienze si ha diminuzione nella totalità di saligenina estratta rispetto a quella introdotta in misura simile alle precedenti con salicilina e in qualche caso, indizio di formazione di acido salicilico.

Come per la salicilina, abbiamo eseguito prove di confronto coll'emulsina. Quantità equimolecolari di saligenina e glucosio venivano a tale scopo, sciolte in acqua e trattate col fermento. Si ebbe sempre l'indizio della formazione di un glucoside, ma in piccola quantità, cioè da un minimo di 0,25 circa ad un massimo di 0,80 per cento della sostanza introdotta. Il contegno

delle sostanze enzimatiche contenute probabilmente nel mais è quindi analogo, anche per ciò che riguarda l'azione sintetica, a quello dell'emulsiina.

Pirocatechina. — Si fecero due prove: l'una al buio, l'altra alla luce. Tanto nel primo caso che nel secondo si trovò, oltre sostanza inalterata, una piccolissima quantità dello stesso corpo che si libera per azione dell'emulsina. Anche la pirocatechina, dunque, si combina in modo simile alla saligenina per dare origine a corpi di natura glucosidica.

Tale sostanza inoltre viene in gran parte distrutta, così che si ritrova poco più di un terzo della sostanza introdotta.

Idrochinone. — Anche coll'idrochinone si fece l'esperienza al buio e alla luce. Si ottenne, in entrambi i casi, dopo esaurimento con etere e successiva aggiunta di emulsina, una piccolissima quantità di sostanza cristallina che però non potè essere identificata. È probabile trattarsi di idrochinone, il quale così si comporterebbe, colla poltiglia del mais, similmente agli altri fenoli studiati.

La quantità di idrochinone ritrovata allo stato libero, fu circa due terzi di quella adoperata.

Nitrile mandelico. — Con questa sostanza si ebbe pure indizio della formazione di un glucoside. L'estratto acquoso della poltiglia fu dapprima distillato col vapore fino che il distillato non dava più la reazione dell'acido prussico. Nel residuo si aggiunse emulsina e si distillò di nuovo. Le prime porzioni del distillato diedero, lievissima, la reazione del bleu di Prussia.

Le esperienze esposte dimostrano dunque che le sostanze attive contenute nella poltigiia di mais, oltre ad esercitare un'azione scomponente sui glucosidi, quali la salicilina, sono capaci di trasformare le sostanze aromatiche (come la saligenina, la pirocatechina e forse anche l'idrochinone ed il nitrile mandelico), in glucosidi.

Quale influenza possano avere la luce od altre condizioni sull'intensità del fenomeno, non possiamo ancora affermare con sicurezza; tali questioni saranno argomento di ulteriori ricerche.

Matematica. — *Funzioni rappresentabili con la formula integrale di Fourier.* Nota di Giuditta Graziani, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

In una mia Nota pubblicata nel volume XVIII, 2° semestre, serie 5ª, fasc. 6°, dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ho riportato le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione $f(x)$ affinchè possa essere rappresentata mediante la formula integrale di Fourier. Ho anche mostrato come alcune funzioni alle quali non si potrebbe applicare nè il criterio di Weber, nè quello di Pringsheim siano pur esse rappresentabili con la formula di Fourier.

Ora voglio far notare che oltre le funzioni cui ho accennato è rappresentabile con la stessa formula suindicata il prodotto di ogni funzione $\psi(\lambda)$ monotòna per una funzione oscillante (per es. $\cos \varrho\lambda$) che sia indipendente dalla variabile d'integrazione α. Si ha cioè

$$\int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0,$$

e questo basta, come è noto [1] per ritenere stabilita la formula integrale di Fourier.

Il dott. Orlando ha dimostrato [2] la stessa proprietà; ma siccome egli ha seguito un procedimento diverso da quello da me tenuto, non credo del tutto inutile questo mio lavoro, che viene a confermare la verità delle relazioni già trovate dal dott. Orlando.

Consideriamo dunque la funzione

$$(1) \qquad F(\alpha) = \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda .$$

Si dimostra facilmente [3] che essa è una funzione continua di $\alpha \gtrless \varrho$, $\alpha \gtrless -\varrho$, quando $\psi(\lambda)$ sia monotòna e tenda a zero per $\lambda = \infty$, e perciò è integrabile fra i due numeri positivi μ e ν. Vediamo il limite di

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda \qquad \text{per } \eta = \infty .$$

Scriviamo:

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda =$$

$$= \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda + \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda$$

per escludere i punti $\alpha = \varrho$; $\alpha = -\varrho$.

Questa espressione è uguale alla seguente:

$$\frac{1}{2}\int_\mu^{\varrho-\varepsilon} d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha + \varrho)\lambda \, d\lambda + \frac{1}{2}\int_\mu^{\varrho-\varepsilon} d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha - \varrho)\lambda \, d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha + \varrho)\lambda \, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha - \varrho)\lambda \, d\lambda ,$$

(1) Nota del dott. L. Orlando, pubblicata nel vol. XVII di questi Rendiconti (ser. 5ª, 2° sem., fasc. 8°).

(2) *Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. fasc. 9°.

(3) Si può usare il metodo seguito dal dott. Orlando per la funzione $\int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda$ nella Nota pubblicata nel vol. XVII, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 8° di questi Rendiconti.

ma si ha per il secondo teorema della media:

$$\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\lambda = \psi(\gamma)\,\frac{\sin(\alpha+\varrho)\xi - \sin(\alpha+\varrho)\gamma}{\alpha+\varrho} \leqq \frac{2\psi(\gamma)}{\alpha+\varrho}$$

e per γ abbastanza alto può rendersi $< \dfrac{\omega}{4(\varrho-\mu-\varepsilon)}$ e analogamente

$$\left|\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\,d\lambda\right| < \frac{\omega}{4(\varrho-\mu-\varepsilon)}$$

o anche

$$\left|\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\lambda\right| < \frac{\omega}{4(\nu-\varrho-\varepsilon')}$$

$$\left|\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\,d\lambda\right| < \frac{\omega}{4(\nu-\varrho-\varepsilon')},$$

risulta perciò:

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\,d\lambda < \omega$$

per η e γ abbastanza alti. Allora poichè $\int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\,d\lambda$ ha un limite ben definito possiamo scrivere:

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \int_a^\infty d\lambda \int_\mu^\nu \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\,d\alpha.$$

Da cui otteniamo:

$$\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(2\varrho-\varepsilon)\lambda\,d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\mu+\varrho)\lambda\,d\lambda$$

$$\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\nu+\varrho)\lambda\,d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(2\varrho+\varepsilon')\lambda\,d\lambda$$

$$\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\,d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin\varepsilon\lambda\,d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\mu-\varrho)\lambda\,d\lambda$$

$$\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\,d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\nu-\varrho)\lambda\,d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin\varepsilon'\lambda\,d\lambda.$$

Cerchiamo ora il

$$\lim_{\substack{\nu=\infty \\ \mu=0}} \int_{\mu}^{\nu} d\alpha \int_{a}^{\infty} \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda$$

e perciò consideriamo gli integrali a secondo membro di ciascuna delle ultime uguaglianze.

Si ha subito

$$\int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu + \varrho)\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos(\nu + \varrho)\xi - \cos(\nu + \varrho)a}{\nu + \varrho}$$

ossia

$$\left| \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu + \varrho)\lambda \, d\lambda \right| \leqq \frac{2\psi(a)}{a(\nu + \varrho)}$$

da cui

$$\lim_{\nu=\infty} \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu + \varrho)\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Analogamente si verifica che

$$\lim_{\nu=\infty} \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu - \varrho)\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Ma è anche

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{0}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Infatti si può scrivere:

$$(2) \qquad \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda = \int_{a}^{\tau} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda + \int_{\tau}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda$$

e ponendo qui $\lambda' = \varepsilon\lambda$ e quindi togliendo l'accento si ha:

$$\int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda'}{\varepsilon}\right)}{\lambda'} \sin \lambda' d\lambda = \int_{\tau\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda =$$

$$= \lim_{\theta=\infty} \psi(\eta) \int_{\eta\varepsilon}^{\xi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda + \lim_{\theta=\infty} \psi\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \int_{\xi}^{\theta} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda ,$$

ove $\xi > \eta\varepsilon$. Siccome $\int_{\xi}^{\theta} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$ resta sempre entro limiti finiti e siccome $\psi\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)$ si annulla per $\theta = \infty$ abbiamo

$$\int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda = \lim_{\theta=\infty} \psi(\eta) \int_{\tau\varepsilon}^{\xi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda ,$$

ma prendendo η abbastanza grande per ε qualunque, si ottiene

$$\left| \int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda \right| < \frac{\omega}{2} .$$

Il primo integrale a secondo membro della (2) è funzione continua di ε quindi, per ε abbastanza piccolo, si ha

$$\int_a^{\eta} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda < \frac{\omega}{2} ,$$

ma allora $\int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda$ è arbitrariamente vicino a zero (più di ω) per $\varepsilon = 0$.

Nello stesso modo si vede che

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi\lambda}{\lambda} \sin \varepsilon'\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Prendiamo ora a considerare l' $\int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho)\lambda \, d\lambda$. Si ha

$$\int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho)\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos(\mu + \varrho)\xi - \cos(\mu + \varrho)a}{\mu + \varrho}$$

e per $\mu = 0$ esso diventa $= \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho\xi - \cos \varrho a}{\varrho}$ ossia

$$\lim_{\mu=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho)\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho\xi - \cos \varrho a}{\varrho}$$

e analogamente:

$$\lim_{\mu=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu - \varrho)\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho\xi - \cos \varrho a}{-\varrho}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho - \varepsilon)\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho}$$

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho + \varepsilon')\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} .$$

Da tutto ciò si deduce che:

$$\int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\varrho\lambda \cos\alpha\lambda \, d\lambda = \lim_{\substack{\nu=\infty \\ \mu=0}} \int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\varrho\lambda \cos\alpha\lambda \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2} \Big\{ \lim_{\varepsilon=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho - \varepsilon)\lambda \, d\lambda - \lim_{\mu=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho)\lambda \, d\lambda +$$

$$+ \lim_{\nu=\infty} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu + \varrho)\lambda \, d\lambda - \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho + \varepsilon')\lambda \, d\lambda -$$

$$- \lim_{\varepsilon=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin\varepsilon\lambda \, d\lambda - \lim_{\mu=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu - \varrho)\lambda \, d\lambda +$$

$$+ \lim_{\nu=\infty} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu - \varrho)\lambda \, d\lambda - \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin\varepsilon'\lambda \, d\lambda \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2} \Big\{ \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} - \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos\varrho\xi - \cos\varrho a}{\varrho} -$$

$$- \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} - \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos\varrho\xi - \cos\varrho a}{-\varrho} \Big\} = 0.$$

Da questo resta stabilito che la funzione $\psi(\lambda)\cos\varrho\lambda$ è rappresentabile con la formula integrale di Fourier.

Con analogo procedimento si dimostra che anche $\psi(\lambda)\sin\varrho\lambda$ è rappresentabile con la stessa formula.

Applicando ora il criterio esposto nel mio citato lavoro si giunge facilmente alla formula (10) della nuova Nota del dott. Orlando sebbene i due metodi siano, come è facile vedere, essenzialmente diversi.

Fisica matematica. — *Sopra un problema di dinamica degli elettroni.* Nota del dott. L. Silla, presentata dal Socio Volterra.

Lo studio dei fenomeni luminosi che si osservano in un tubo di vetro contenente del gas rarefatto, percorso da scariche elettriche ed esposto all'azione di un campo magnetico, ha indotto il prof. Righi [1] a formulare l'ipotesi che quei fenomeni siano dovuti alla formazione di certi raggi, che egli denomina *raggi magnetici*, i quali sarebbero prodotti dal moto traslatorio di tanti sistemi elettricamente neutri, simili a stelle doppie, e formati ciascuno d'un ione positivo e d'un elettrone negativo. L'elettrone si muoverebbe, relativamente all'ione, alla stessa guisa d'un pianeta che graviti

[1] Cfr. A. Righi, *La materia radiante e i raggi magnetici*, Bologna, 1909; *Sul moto di un elettrone intorno ad un ione nel campo magnetico* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, t. XVII, 1908, pp. 675-681; Il Nuovo Cimento, t. XVII, 1° semestre 1909, pp. 195-202).

intorno al sole, con la differenza che la gravitazione è qui sostituita dalla forza elettrica.

Per sviluppare matematicamente la sua ipotesi, l'eminente fisico di Bologna prende in esame uno di tali sistemi elementari, o stelle doppie, in movimento e trova vantaggioso d'introdurre una semplificazione nel problema dinamico, limitandosi allo studio del moto relativo dell'elettrone rispetto al ione, che è concepito immobile o animato d'un semplice moto progressivo, ed ammettendo altresì che l'elettrone si muova in un piano normale al campo magnetico, il quale è supposto uniforme e costante.

Io mi propongo qui di fare un esame quantitativo delle equazioni stabilite dal prof. Righi, e d'integrare completamente quelle equazioni mediante le trascendenti ellittiche. Le conclusioni alle quali perverrò mi sembrano utili per giudicare entro quali limiti di velocità per l'elettrone si produca la stabilità dei sistemi binarî ione-elettrone considerati dal prof. Righi. Tuttavia dovrò limitarmi, in questi Rendiconti, ad un semplice riassunto dei calcoli, i quali saranno sviluppati più largamente altrove.

Riferendoci ad una coppia di assi cartesiani ortogonali, con l'origine nello ione, il moto piano dell'elettrone è definito dall'equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -h\dfrac{x}{r^3} - k\dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -h\dfrac{y}{r^3} + k\dfrac{dx}{dt}, \end{cases}$$

x, y denotando le coordinate del mobile, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ il raggio vettore ed h, k due costanti intimamente legate alla questione fisica che si studia. Si ha, infatti,

$$h = \alpha\frac{e^2}{m} \quad , \quad k = \gamma \mathrm{M}\frac{e}{m},$$

dove α e γ sono rispettivamente le costanti che figurano nelle formole di Coulomb, sulle azioni elettrostatiche e di Biot e Savart, e indica il valore aritmetico della carica comune all'elettrone e allo ione, m la massa dell'elettrone ed M l'intensità del campo magnetico.

Le equazioni (1) sono valide, e calcolabili numericamente, in qualunque sistema di unità; siccome noi, nella presente Nota, ci riferiremo al sistema elettromagnetico assoluto c. g. s., assumeremo $\alpha = 9.10^{20}$ e $\gamma = 1$. Si ha poi $e = 10^{-20}$, $\dfrac{e}{m} = \dfrac{10^{-20}}{\frac{1}{2}10^{-27}} = 2.10^7$ ed $\mathrm{M} = 10^3$ unità, come nelle esperienze del prof. Righi. Quindi per h e k risultano i valori numerici seguenti

$$h = 2.10^8 \ , \ k = 2.10^{10}.$$

Il vettore che rappresenta l'accelerazione posseduta dall'elettrone allo istante t si può pensare risultante di due: l'uno d'intensità eguale ad $\frac{h}{r^2}$, diretto secondo il raggio vettore e che dipende dalla forza elettrica, l'altro normale alla velocità v dell'elettrone e d'intensità kv, dipendente dal campo magnetico. È utile di distinguere gli effetti che questi due vettori, separatamente, producono sul moto dell'elettrone.

Se consideriamo soltanto l'effetto prodotto dall'azione dello ione, il movimento sarà definito dalle equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -h\frac{x}{r^3} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -h\frac{y}{r^3} ;$$

quindi, indicando ancora con v la velocità del mobile, si ottiene

$$v^2 = \frac{2h}{r} - b , \tag{2}$$

dove $-b$, come nelle notazioni del prof. Righi, denota la costante d'integrazione. Giova notare subito che il valore di v^2 è lo stesso di quello che somministrano le equazioni (1), ciò che era evidente a priori. Introducendo le condizioni iniziali, il valore di b rimane così definito

$$b = \frac{2h}{r_0} - v_0^2 ,$$

vale a dire la costante b dipende unicamente dagli elementi h, r_0 e v_0. Ora, nelle esperienze del prof. Righi, il valore medio della pressione del gas nel tubo è di 0,25 mm.; un calcolo semplice mostra che, in tali condizioni, la distanza molecolare è dell'ordine di 10^{-5} cm. D'altra parte, essendo 10^{-8} il diametro molecolare (1), potremo rappresentare r_0 con $10^{-\alpha}$, dove $8 > \alpha > 5$. Quanto a v_0, osserviamo che la velocità assoluta dello ione è dell'ordine di 10^7 cm.; quella dell'elettrone, invece, è dell'ordine di 4.10^9 cm. in media; potremo, pertanto, ancora supporre che la velocità relativa dell'elettrone, rispetto al ione, sia dell'ordine di 10^9 e risulterà, in conseguenza,

$$b = \frac{2.2.10^8}{10^\alpha} - 1{,}6.10^{19} .$$

Ma l'ultimo termine a secondo membro, in valore assoluto, prevale decisamente sul primo; epperò si ha $b < 0$. Dalla (2) risulta, quindi, che l'elettrone può allontanarsi indefinitamente dallo ione; in ogni caso l'elettrone

(1) Tolgo questi dati numerici dall'accurata monografia dell'ing. U. Bordoni, della R. Scuola degl'ingegneri di Roma, *Le basi sperimentali della teoria degli elettroni* (Pubblicazioni del Circolo fisico-matematico di Roma, 1909).

può, con velocità reale, superare la distanza intermolecolare (10^{-5} cm.), ove si assuma per v_0 il valore medio 4.10^9. Se si considerassero valori di v_0 dell'ordine di 10^6, o minori, sarebbe $b > 0$, come nel caso ammesso dal prof. Righi, con stabilità del sistema ione-elettrone.

Se si tiene ragione del solo effetto prodotto sul moto dell'elettrone dal campo magnetico, si hanno le equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = k\frac{dx}{dt} \, .$$

L'elettrone descriverebbe, intorno allo ione, un cerchio di raggio $R = \frac{v_0}{k} = \frac{4.10^9}{M.2.10^7}$. Si riconosce quindi che l'azione del campo magnetico tende a rendere stabile il sistema ione-elettrone, ma per campi magnetici assai intensi. Invero R è inversamente proporzionale ad M, cioè all'intensità del campo; ora, per un campo di circa 10^3 unità, risulta R dell'ordine di 10^{-1} (= 1 millimetro), e ricordiamo che la distanza molecolare è dell'ordine di 10^{-5}.

Le precedenti riflessioni sono sufficienti per concludere che, nelle condizioni sperimentali ammesse, sono da distinguere tre ordini di grandezza possibili per la velocità dell'elettrone, che noi assumiamo come iniziale: una che può chiamarsi la *velocità critica* dell'elettrone, dell'ordine di 10^6 circa, le altre due l'una inferiore, l'altra superiore a 10^6. Per velocità iniziali eguali o inferiori alla velocità critica è certamente $b > 0$ e si hanno condizioni favorevoli per l'esistenza dei sistemi binarî ione-elettrone considerati dal prof. Righi, e, in tal caso, il campo magnetico favorisce la stabilità di quei sistemi. Per velocità superiori a quella critica, fra le quali la velocità media d'un elettrone ($= 4.10^9$), che noi qui consideriamo, è $b < 0$, e l'elettrone non può associarsi ad un ione in un sistema che si possa assimilare ai più semplici sistemi astrali, quali le stelle doppie.

Le equazioni (1) offrono però un esempio assai interessante di movimento nel quale l'uso delle trascendenti ellittiche, per la completa integrazione di quelle equazioni, si presta ad una esauriente discussione del problema meccanico e ci permette di provare che, nel moto dell'elettrone, mentre il raggio vettore descrive un angolo finito, a partire dalla posizione iniziale, il mobile si allontana dal ione d'una quantità assai superiore alla distanza molecolare.

Dalle (1) si ottengono facilmente due integrali, uno dei quali è già offerto dalla (2). Se introduciamo le variabili polari r e θ, i due integrali assumono la forma seguente

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2h}{r} - b \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{2} + \frac{a}{r^2} \, ,$$

con le costanti arbitrarie a e b. Eliminando θ si ottiene una relazione della forma $dt = \pm \frac{r\,dr}{\sqrt{\varphi(r)}}$, dove

$$\varphi(r) = -\frac{k^2}{4} r^4 - (b + ak) r^2 + 2hr - a^2,$$

dalla quale si può dedurre t in funzione di r, mediante un integrale ellittico. Ma a noi preme di esprimere r in funzione ellittica di t. Pertanto assimileremo il polinomio $\varphi(r)$ al polinomio generale del 4° grado $a_0 r^4 + 4a_1 r^3 + 6a_2 r^2 + 4a_3 r + a_4$, prendendo

$$(3) \qquad a_0 = -\frac{k^2}{4}\ ,\ a_1 = 0\ ,\ a_2 = -\frac{b + ak}{6}\ ,\ a_3 = \frac{h}{2}\ ,\ a_4 = -a^2.$$

Indicando, poi, con u e v due argomenti ellittici, poniamo, d'accordo con la teoria generale [1],

$$r = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v}\ .$$

La u è funzione del tempo t, la v è costante ed è definita in valore e segno dalle equazioni

$$(4) \qquad \mathfrak{p}v = -\frac{a_2}{a_0}\ ,\ \mathfrak{p}'v = \frac{a_3}{a_0}\ .$$

Se immaginiamo costruita la funzione ellittica $\mathfrak{p}u$, con gl'invarianti g_2 e g_3, questi sono esprimibili con i coefficienti del polinomio $\varphi(r)$. Per il calcolo numerico di g_2 e g_3 occorre quindi d'introdurre in (3) i dati sperimentali riportati innanzi e il valore di a, desunto dall'equazione

$$a = r_0^2\left(\theta_0' - \frac{k}{2}\right).$$

Supporremo r_0 eguale a 10 diametri molecolari, quindi dell'ordine di 10^{-7}. Quanto a θ_0' il calcolo assegna a θ', velocità angolare dell'elettrone, un valore dell'ordine di 10^{15} circa, beninteso ove si tratti d'una frequenza tale che le radiazioni emesse ci appariscano luminose. Conviene perciò assumere $\theta_0' = 10^{\lambda}$, con $15 > \lambda > 0$. Se si forma una tabella dei valori di a e di $b + ak$, corrispondenti a quelli di λ, compresi nell'intervallo 0, 15, si troverà in ogni caso $b + ak < 0$. Calcolati inoltre, g_2 e g_3 si trova

$$g_2 > 0\ ,\ g_3 > 0\ ,\ \Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2 > 0;$$

quindi si conclude che dei due semiperiodi ω ed ω' della funzione $\mathfrak{p}u$, il

[1] Ved. per esempio, P. Appell e E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*. Paris, 1897.

primo è reale ed il secondo è un immaginario puro. Posto, inoltre, $s = \wp u$, l'equazione cubica

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

ha tutte e tre le radici reali; le rappresenteremo con e_1, e_2, e_3 e supporremo $e_1 > e_2 > e_3$.

Per le (4) si ha poi

$$\wp v = -\frac{2}{3}\frac{b + ak}{k^2} > 0 \quad , \quad \wp' v = -2\frac{h}{k^2} < 0 .$$

L'argomento v è dunque reale ed è compreso fra zero ed ω; potremo scrivere, indicando con ε una quantità positiva,

$$v = \omega - \varepsilon .$$

Il polinomio $\varphi(r)$ ha le sue quattro radici reali. Invero, affinchè ciò si verifichi, devono contemporaneamente essere soddisfatte le condizioni

$$a_1^2 - a_0 a_2 > 0 \quad ; \quad 12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - S a_0^2 > 0 ,$$

dove

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 .$$

Nel caso nostro, come si verifica facilmente, queste condizioni sono soddisfatte; quindi, tenuto conto che $a_0 < 0$, l'argomento u deve avere una delle due forme seguenti

$$u_1 = -\frac{v}{2} + \alpha \quad , \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega + i\alpha ,$$

con α variabile da 0 ad $\frac{\omega'}{i}$. In corrispondenza si hanno, per il raggio vettore r, i due valori

$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp' v}{\wp\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp v} \quad , \quad r_2 = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{v}{2} + \omega + i\alpha\right) - \wp' v}{\wp\left(-\frac{v}{2} + \omega + i\alpha\right) - \wp v} .$$

Una breve discussione mostrerà che $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. La soluzione r_2 va quindi rifiutata e rimane per r il solo valore possibile

$$r = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp' v}{\wp\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp v} .$$

Questo valore ammette un minimo ed un massimo, corrispondentemente ad $\alpha = \frac{\omega'}{i}$ ed $\alpha = 0$. Detto R il valore massimo si ha

$$R = -\frac{1}{2}\frac{p'\frac{v}{2} + p'v}{p\frac{v}{2} - pv} = \sqrt{p\frac{v}{2} + p\frac{v}{2} + pv}\ .$$

Ora R è assai grande; cerchiamo di calcolarlo in prima approssimazione. Poichè $p'v = -10^{-12}$, possiamo assumere, in una prima approssimazione, $v = \omega$. Inoltre, essendo Δ assai piccolo, sarà sensibilmente $e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e_1$. Ciò posto, nella formula per l'addizione di un semiperiodo ω all'argomento di pu, facciamo $u = -\frac{\omega}{2}$; si ricavano per $p\frac{v}{2}$ i due valori $e_1 \pm \frac{3}{2}e_1$. Ma il secondo è da rifiutarsi, perchè risulterebbe $p\frac{v}{2} < 0$, mentre fra 0 ed ω la funzione pu è positiva; quindi $p\frac{v}{2} = \frac{5}{2}e_1$. Ma $e_1 = 0{,}0268$ e $p\omega = e_1$; segue pertanto $R = \sqrt{6e_1} = 4.10^{-1}$.

Esprimiamo ora u per t; dobbiamo porre

$$\frac{dr}{\sqrt{\varphi(r)}} = \frac{du}{\pm i\frac{k}{2}},$$

e quindi

$$dt = r\frac{dr}{\sqrt{\varphi(r)}} = \pm\frac{1}{ik}\cdot\frac{p'u - p'v}{pu - pv}du.$$

Per decidere del segno $\pm$, converremo di partire dal valor minimo del raggio vettore; in tal caso r crescerà con t mentre α decrescerà da $\frac{\omega'}{i}$ a 0. Ora, se $u = -\frac{v}{2} + i\alpha$, $du = id\alpha$, quindi

$$\frac{dt}{du} = \frac{dt}{id\alpha} = \frac{r}{\pm i\frac{k}{2}}.$$

Siccome α decresce, col crescere di t, converrà tenere il segno $-$; cioè si avrà

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{2r}{k}.$$

Dunque

$$t = -\frac{1}{ik}\left\{\log\frac{pu - pv}{\sigma(u - v)}\sigma(u + v) - 2u\zeta v\right\} + \text{cost.}$$

Abbiamo supposto di computare il tempo dall'istante in cui r è minimo. Ma r è minimo per $\alpha = \frac{\omega'}{i}$; quindi se $u = -\frac{v}{2} + i\alpha$, per $t = 0$, avremo $u_0 = -\frac{v}{2} + \omega'$. Seguirà

$$t = -\frac{1}{ik}\left\{\log \frac{\mathrm{p}\left(-\frac{v}{2}+i\alpha\right)-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}\left(-\frac{v}{2}+\omega'\right)-\mathrm{p}v}\cdot\frac{\sigma\left(\frac{v}{2}+i\alpha\right)}{\sigma\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)}\cdot\frac{\sigma\left(-\frac{3}{2}v+\omega'\right)}{\sigma\left(-\frac{3}{2}v+i\alpha\right)} - 2(i\alpha-\omega')\zeta v\right\}.$$

Detto T il valore del tempo che decorre dal passaggio di r dal valore minimo al valor massimo, per avere T basterà fare $\alpha = 0$ nella precedente equazione e si troverà

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{ik}\log\frac{\mathrm{p}\frac{v}{2}-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}\left(-\frac{v}{2}+\omega'\right)-\mathrm{p}v}\cdot\frac{\sigma\frac{v}{2}}{\sigma\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)}\cdot\frac{\sigma\left(-\frac{3}{2}v+\omega'\right)}{\sigma\left(-\frac{3}{2}v\right)}e^{2\omega'\zeta v}.$$

Calcoliamo T in prima approssimazione, facendo $v = \omega$; si troverà

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{k} = 2\pi \,.\, 10^{-10}.$$

Il raggio vettore, dunque, crescerà fino alla grandezza dell'ordine di 10^{-1} in un tempo dell'ordine di 10^{-10}.

Ci rimane da esprimere l'anomalia θ per t. Si ha, intanto,

$$d\theta = dt\left(\frac{k}{2}+\frac{a}{r^2}\right);$$

donde, tralasciando per ora i limiti,

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{2a}{ik}\int\frac{du}{r} = \frac{k}{2}t - \frac{4a}{ik}\int\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v}\,du\,.$$

Per il calcolo dell'integrale a secondo membro, bisogna decomporre in elementi semplici l'espressione $\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v}$. Questa operazione che, come è noto, presenta sempre gravi difficoltà, conduce nel presente caso a sviluppi piuttosto laboriosi. Mi limiterò qui a riferire il procedimento del calcolo.

Si ha, intanto,

$$\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v} = \frac{(\mathrm{p}u-\mathrm{p}v)(\mathrm{p}'u+\mathrm{p}'v)}{4(\mathrm{p}^3u-\mathrm{p}^3v)-g_2(\mathrm{p}u-\mathrm{p}v)} = \frac{\mathrm{p}'u+\mathrm{p}'v}{4\mathrm{p}^2u+4\mathrm{p}u\,\mathrm{p}v+4\mathrm{p}^2v-g_2}.$$

Si tratta di trovare le radici del denominatore. Ora

$$4\mathfrak{p}^2u + 4\mathfrak{p}u\,\mathfrak{p}v + 4\mathfrak{p}^2v - g_2 = 4\left\{\mathfrak{p}u - \frac{-\mathfrak{p}v + \frac{2a}{k}}{2}\right\}\left\{\mathfrak{p}u - \frac{-\mathfrak{p}v - \frac{2a}{k}}{2}\right\}$$
$$= 4(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}l)(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}m),$$

dove l ed m sono due argomenti ellittici definiti dall'equazioni

$$2\mathfrak{p}l = -\mathfrak{p}v + \frac{2a}{k},$$

$$2\mathfrak{p}m = -\mathfrak{p}v - \frac{2a}{k}.$$

Sostituendo, risulta

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{a}{ik}\int \frac{\mathfrak{p}'u + \mathfrak{p}'v}{(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}l)(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}m)}\,du.$$

Ora, posto

$$\frac{1}{(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}l)(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}m)} = \frac{A}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}l} + \frac{B}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}m},$$

si trovano

$$A = \frac{1}{\mathfrak{p}l - \mathfrak{p}m}, \quad B = -\frac{1}{\mathfrak{p}l - \mathfrak{p}m}.$$

Onde, sostituendo ed integrando fra u_0 ed u, verrà

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{a}{ik(\mathfrak{p}l - \mathfrak{p}m)}\left[\log\frac{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}l}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}m} + \frac{\mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}'l}\left\{\log\frac{\sigma(u-l)}{\sigma(u+l)} + 2u\zeta l\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}'m}\left\{\log\frac{\sigma(u-m)}{\sigma(u+m)} + 2u\zeta m\right\}\right]_{u_0}^{u}.$$

Ma $u = -\frac{v}{2} + i\alpha$, $u_0 = -\frac{v}{2} + \omega'$; quindi, fatte tutte le semplificazioni, si troverà

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{1}{2i}\left[\log\frac{\mathfrak{p}\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \mathfrak{p}l}{\mathfrak{p}\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \mathfrak{p}m} \cdot \frac{\mathfrak{p}\left(-\frac{v}{2} + \omega'\right) - \mathfrak{p}m}{\mathfrak{p}\left(-\frac{v}{2} + \omega'\right) - \mathfrak{p}l} - \right.$$
$$- \log\frac{\sigma\left(-\frac{v}{2} + i\alpha - l\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2} + i\alpha + l\right)} \cdot \frac{\sigma\left(-\frac{v}{2} + i\alpha - m\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2} + i\alpha + m\right)} \cdot \frac{\sigma\left(-\frac{v}{2} + \omega' + l\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2} + \omega' - l\right)} \cdot$$
$$\left. \cdot \frac{\sigma\left(-\frac{v}{2} + \omega' + m\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2} + \omega' - m\right)} - 2(i\alpha - \omega')(\zeta l + \zeta m)\right].$$

Se in questa relazione si fa $\alpha = 0$, talchè T è il valore corrispondente di t, in prima approssimazione, per $v = \omega$, si troverà il valore Θ di θ corrispondente, cioè $\Theta = \pi$. Dunque l'elettrone si allontana, nel tempo T, d'una quantità dell'ordine di 10^{-1} (= 1 millimetro), mentre il raggio vettore si troverà girato d'un angolo finito.

Meccanica. — *Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques.* Nota di N. Kryloff (ingénieur des mines), presentata dal Socio U. Dini.

On est conduit, comme on sait, dans ce problème à considérer l'équation suivante aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \varphi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

à laquelle on cherche à satisfaire par un mouvement pendulaire d'amplitude variable y:

$$W = y(x) \cos t\sqrt{k},$$

en déterminant convenablement la fonction $y(x)$ et le paramètre k, ce qui nous amène (la verge étant encastrée par ses deux bouts) à étudier la possibilité du développement des fonctions, dites arbitraires, d'une variable réelle, suivant les solutions doublement tangentes à l'axe OX, aux points a et b, de l'équation différentielle du 4^{me} ordre:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x)\, y. \tag{1}$$

L'existance effective des valeurs, dites singulières, de k, c. à. d. telles qu'à chaque valeur singulière k_i correspond une fonction $\varphi_i(x)$ vérifiant le (1) avec les conditions initiales et finales $\varphi_i(x) = 0$ ainsi que $\varphi_i'(x) = 0$ pour $x = a$ et $x = b$ a été l'objet des recherches de M. Davidouglou, qui dans sa thèse (1905) a établi par une voie peut-être un peu longue, la possibilité du développement suivant les fonctions $\varphi_i(x)$, moyennant les conditions, que la fonction $f(x)$, dont il s'agit à développer, ne possède que les 4 premieres dérivées. C'était du reste aussi la condition de M. Myller, qui de son côté s'est occupé de la question dans sa thèse, au point de vue des équations intégrales. Or, il parait, qu'on peut arriver plus directement à démontrer la possibilité du développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ suivant les $\varphi_i(x)$, en suivant la méthode ingénieuse et profonde de M. Picard (cours de cette année à la Sorbonne) pour le cas du développement suivant

les solutions de l'équation différentielle du 2e ordre: $\frac{d^2y}{dx^2} = k\varphi(x)\, y$, où de plus $\varphi_i(x)_{\substack{x=a \\ x=b}} = 0$.

La généralisation de la méthode de M. Picard, basée sur un théorème de convergence de M. Schmidt, peut se faire comme il suit:

D'après Schmidt on a la série absolument et uniformément convergente:

$$(2) \qquad \sum_n \int_a^x \Phi_n(z)\, dz \int_a^b \psi(x)\, \Phi_n(x)\, dx\,,$$

où $\psi(x)$ est continue et $\int_a^b \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, dx = \begin{matrix} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = 1\,. \end{matrix}$

Posons ici

$$\varphi_n'(x) = \int_a^x \Phi_n(z)\, dz\,;\ \text{c. à. d. } \varphi_n''(x) = \Phi_n(x) \text{ et } \psi(x) = f''(x).$$

Alors (2) s'écrit:

$$(3) \qquad \sum_n \varphi_n'(x) \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx\,.$$

Je dis que (3) réprésente $f'(x)$ si les conditions, qui vont être énoncées, sont vérifiés. En effet multiplions les deux parties de (4) par $\varphi_n'''(x)$ et intégrons entre a et b:

$$(4) \qquad f'(x) - \sum \varphi_n'(x) \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx = \mathrm{F}(x)\,.$$

On obtient:

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx = \int_a^b f'(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx - \sum_n \int_a^b \varphi_n'(z)\, \varphi_m'''\, dx \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx.$$

Or:

$$\int_a^b f'(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx = |f'(x)\, \varphi_m''(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)\, \varphi_m''(x)\, dx = -$$

$$- \int_a^b f''(x)\, \varphi_m''(x)\, dx \text{ si } f'(x) = 0 \text{ pour } \begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix},$$

et

$$\int_a^b \varphi_n'(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx = |\varphi_n(x)\, \varphi_m'''(x)|_a^b - \int_a^b \varphi_n\, \varphi_m^{\mathrm{IV}}\, dx = \begin{matrix} -1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix},$$

$$\text{car } \varphi_n(x) = 0 \text{ pour } x \begin{matrix} = a \\ = b \end{matrix}.$$

De plus $\varphi_m^{\mathrm{IV}} = k\varphi_m(x)\, \varphi(x)$ et $\int_a^b k\varphi(x)\, \varphi_m(x)\, \varphi_n(x) = \begin{matrix} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix}$, comme on le sait (Rg. thèse, Davidouglou).

Donc on a

$$\int_a^b F(x)\,\varphi_n'''(x)\,dx = -\int_a^b f''(x)\,\varphi_n''(x)\,dx + \int_a^b f'''(x)\,\varphi_n''(x)\,dx = 0;$$

donc de l'égalité:

$$\int_a^b F(x)\,\varphi_n'''(x)\,dx = 0 \quad (\text{pour } n = 1,2,\ldots\infty)$$

on tire, que $F(x) \equiv 0$, si le système $\varphi_n'''(x)$ est fermé; la possibilité du développement de $f'(x)$ suivant les $\varphi_n'(x)$ sera donc démontré, moyennant toutes les conditions mentionnées. On a donc la série:

$$\sum_n \varphi_n'(x) \int_a^b f''(x)\,\varphi_n''(x)\,dx\,,$$

dont les termes sont fonctions de x finies et intégrables entre a et b, et qui est uniformement convergente dans l'intervalle ab; alors sa somme, que nous avons démontrée tout à l'heure être $f'(x)$, sera intégrable entre a et b, et la série

$$\sum_n \int_a^x \varphi_n'(x)\,dx \int_a^b f''(x)\,\varphi_n''(x)\,dx = \sum_n \varphi_n(x) \int_a^b f''(x)\,\varphi_n''(x)\,dx$$

(car $\varphi_n(a) = 0$), sera uniformément convergente entre a et b et aura pour la somme

$$\int_a^x f'(x)\,dx = f(x)$$

(Dini, *Calcolo integrale*, pp. 143-145). Donc on a le

Théoreme: Toute fonction continue, s'annulant pour $x = a$ et $x = b$, c. à. d. telle que $f(a) = f(b) = 0$ se développe en série absolument et uniformement convergente des fonctions $\varphi_n(x)$ entre a et b, pourvu que: 1°) la 1re et la 2e dérivée de $f(x)$ c. à. d. $f'(x)$ et $f''(x)$ soient continues; 2°) $f'(a) = f'(b) = 0$ ainsi que $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$; $\varphi_n'(a) = \varphi_n'(b) = 0$ quelque ce soit n; 3°) la suite de $\varphi_n''(x)$ est orthogonale et normale c. à. d.

$$\int_a^b \varphi_n''(x)\,\varphi_m''(x)\,dx = \begin{matrix} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix};$$

4°) la suite de $\varphi_n'''(x)$ forme un système fermé.

Or il est aisé de voir, que les fonctions $\varphi_n(x)$ intervenants dans le problème en question, c. à. d. telles que $\frac{d^4\varphi_n(x)}{dx^4} = k\varphi_n(x)\,\varphi(x)$, vérifient les conditions du théoreme précédent; en effet:

1°) L'existence éffective des valeurs singulières k_n à été établie aux conditions: $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$; $\varphi'_n(a) = \varphi'_n(b) = 0$.

2°) L'intégration par parties donne:

$$\int_a^b \varphi''_n(x)\,\varphi''_m(x)\,dx = |\,\varphi'_n(x)\,\varphi''_m(x)\,dx\,|_a^b -$$

$$-\int_a^b \varphi'_n(x)\,\varphi'''_m(x)\,dx = -|\,\varphi_n(x)\,\varphi'''_m(x)\,dx\,|_a^b + \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi^{\mathrm{IV}}_m(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,k\varphi(x) = \begin{matrix} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix};$$

donc le 2°) du théoréme précédent est rempli.

3°) En suivant le chemin, tracé par M. Picard (dans le cas de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = k\varphi(x)\,y$), on démontrera, que les conditions

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\varphi'''_n(x)\,dx = 0 \quad (n = 1, 2 \ldots \infty),$$

dans le cas de l'éxistence éffective de la fonction $\mathrm{F}(x)$, intégrable entre a et b (comme elle est dans notre cas cette fonction $\mathrm{F}(x)$), aboutissent à une contradiction. En effet, on a:

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\varphi'''_n(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx\right]\varphi'''_n(x)\,dx =$$

$$= \left\{\left|\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx\right|\varphi'''_n(x)\right\}_a^b - \int_a^b \left\{\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx\right\}\varphi^{\mathrm{IV}}_n(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \psi(x)\,\varphi_n(x)\,dx.$$

Donc tout révient à démontrer que le systéme de $\varphi_n(x)$ est fermé; c. à. d.

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{5}$$

pour $n = 1, 2 \ldots \infty$ entraîne $\mathrm{F}(x) \equiv 0$.

Supposons le contraire et envisageons l'équation:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = k\varphi(x)\,y + \mathrm{F}(x); \tag{6}$$

alors les conditions (5) entraînent (Davidouglou, *Thèse*, pp. 39-40) que l'intégrale $y(x)$ de (6), qui touche OX aux points a et b, n'a pas de pôles, c. à. d. réprésente une fonction entière, dont le rayon de convergence est infini; d'autre part on peut étudier le cercle de convergence de

$$y = y_0 + ky_1 + \cdots + k^n y_n + \cdots \tag{7}$$

par la considération du rapport $\frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_{n-1}}$ où $\mathrm{U}_n = \int_a^b y_0(x)\,y_n(x)\,\varphi(x)\,dx$. La

présence de $F(x)$ ne modifie pas l'éssence du raisonnement; on substitue (7) dans (6) et en égalant les coéficients de diverses puissances de λ on obtient:

$$\frac{d^4 y_0}{dx^4} = F(x) \; ; \; \frac{d^4 y_1}{dx^4} = \varphi(x)\, y_0 \; ; \; \ldots$$

avec les conditions:

$$y_n(a) = y_n(b) = 0 \; ; \; y'_n(a) = y'_n(b) = 0 \, .$$

Alors la série

$$\Phi(k) = \int_a^b \varphi(x) y_0 \{ y_0 + k y_1 + \cdots k_n y_n + \cdots \} dx = U_0 + U_1 k + \cdots U_n k^n + \cdots$$

où toutes les U_n sont positives et telles que

$$0 < \frac{U_1}{U_0} < \frac{U_2}{U_1} < \cdots < \frac{U_n}{U_{n-1}} < \cdots ,$$

donne (Davidouglou, Ibid., pag. 73) $\frac{1}{k_1} = \lim \frac{U_n}{U_{n-1}}$, où $k_1 =$ rayon de convergence de (7).

Donc on arrive à une contradiction, car $F(x)$, n'étant pas identiquement nul, y_0 n'est pas $\equiv 0$, ainsi que toutes les y_n consécutives. Donc toutes les U_n sont > 0 et les rapports $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ sont des nombres déterminés; la limite de $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ pour $n = \infty$ existe et est > 0. D'autre part, cette limite, étant égale à l'inverse du rayon de convergence de la série (7) (qui est entière), devrait être égale à zéro, et cela ne se peut. Donc le théorème est démontré. La méthode précédente a l'avantage, d'après ce qu'il parait, de n'exiger d'autre restrictions, imposées à la fonction continue, dont il s'agit à développer, *que la continuité de ses deux premières dérivées* (1).

(1) En corrigeant les épreuves, j'ai appris de M. Piccone, qu'il va publier dans les « Annales de l'École Normale de Pise » un travail où il arrive par une voie toute différente (basée sur la th. des équations intégrales) au même résultat.

Fisica. — *Sulle misure sistematiche delle temperature dei prodotti vulcanici caldi od incandescenti e sui migliori metodi per effettuarle.* Nota di Emilio Oddone, presentata dal Socio Blaserna.

Un ben inteso programma di studio sul vulcanismo deve comprendere in prima linea la determinazione delle temperature degli aeriformi caldi e delle deiezioni incandescenti che provengono dai vulcani. Occupandocene in questa Nota, manterremo per motivi da dirsi in seguito, una divisione tra i metodi che si prestano alla determinazione delle temperature degli aeriformi e quelli che si confanno alle analoghe indagini per le lave e le scorie.

1) *Determinazione della temperatura delle fumarole.* Le determinazioni di temperatura dei prodotti aeriformi vulcanici sono numerosissime, però un gran numero lasciano il dubbio che non siano state condotte col dovuto rigore, specie quelle ad alta temperatura, nelle quali l'incertezza delle misure cresce rapidamente. Salvo rari casi, non appena la temperatura superò le solite scale dei termometri ordinarî, si ricorse al primordiale metodo della fusione dei metalli, impiegando una serie di poche sostanze, per es. limitando i saggi ai fili di stagno, di piombo, di zinco ecc. e provando quali di questi fili fondono al calore della sorgente (1). Questo corrisponde ad approssimarsi alla temperatura cercata con errori che possono salire anche al 40 %. Altro manco è, che, generalmente sono state iniziate dopo un massimo di sviluppo delle fumarole, per cui l'osservatore ha in prevalenza seguito il solo andamento della temperatura discendente; inoltre si sono gli osservatori piuttosto preoccupati di stabilire un confronto termometrico tra fumarole simultaneamente apparse qua e là sulla superficie del cono vulcanico, anzichè proseguire le osservazioni sistematiche alle medesime fumarole per mesi ed anni allo scopo di indagare quale funzione la loro temperatura sia del tempo.

Che si debbano invece istituire delle misure rigorose e frequenti, lo provano le osservazioni recentissime di F. A. Perret, pubblicate nel « The American Journal of science », vol. XXVIII, n. 167, 1909. Esse sono pochissime, e nondimeno istruttive. Come introduzione, Perret lamenta che nell'attuale riposo del Vesuvio, che dura da tre anni, non si siano fatte regolari osserva-

(1) Nelle manifatture di porcellana, a contenere i forni tra dati limiti di temperatura, si usano le serie delle *montres fusibles de* Seger, preparate con sabbia, feldispato, carbonato di calcio e caolino in varie proporzioni variamente fusibili di 15° in 15° tra 500° e 1800°. Non ho però mai inteso che esse sieno state impiegate in vulcanologia.

zioni di temperatura (1), nè si sia almeno determinata la variazione della composizione chimica delle emanazioni gassose (2). Cerca di dimostrare la importanza delle osservazioni fatte, non alle fumarole *secondarie* che provengono dalle lave fluenti ed hanno vita effimera, ma alle fumarole *primarie* che escono da vere lesioni nell'apparato vulcanico e sono probabilmente collegate colle condizioni interne del vulcano. Di speciale interesse sono per lui le misure fatte in quell'intervallo di riposo del vulcano, compreso tra la fine di un periodo attivo ed il principio del successivo. Con l'intento quindi di afferrare quest'intervallo di vita vulcanica, durante il quale le fumarole dopo essersi raffreddate $\left(\frac{dT}{dt} \text{ negativo}\right)$, passano per un minimo $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$ e riprendono un andamento ascendente $\left(\frac{dT}{dt} \text{ positivo}\right)$; egli in mesi diversi, fece alcune determinazioni ad una fumarola primaria situata sul fianco Nord del cono vesuviano. Dato il riposo del vulcano dopo la grande eruzione del 1906, era da attendersi che queste fumarole andassero raffreddandosi; però quando ai primi del 1908 Perret intraprese le sue osservazioni, notò che la temperatura percorreva già il suo ramo ascendente. Infatti nei primi giorni del 1908 con un pirometro elettrico trovò 323° C., il 5 marzo 344°; ed il 3 settembre 435°. Questa serie che si annunziava interessante, fu interrotta per via dei cercatori di minerali vesuviani, i quali guastarono la fumarola. In una nuova serie la temperatura fino a tutto luglio 1909 ebbe ancora un andamento ascendente, e l'aumento di temperatura risulta anche dalle osservazioni ad un'apertura vicina: addì 9 luglio la temperatura era di 300° ed addì 14 agosto 308°.

Qualunque sia per essere la spiegazione di quest'aumento di temperatura (3) abbiamo data larga recensione alle osservazioni del Perret perchè portano un contributo ad una questione tra le più importanti in un progremma di studî sperimentali sui vulcani.

Se gli antichi metodi avessero prevalso, quelle particolarità sarebbero quasi sfuggite e ne saremmo ancora a ritenere la temperatura di quelle fumarole come compresa circa tra il punto di fusione del piombo e quello dello zinco.

(1) Il prof. C. Chistoni, se ragioni di delicatezza non glielo avessero vietato, avrebbe già da tempo intrapreso la determinazione delle temperature delle fumarole al Vesuvio; egli le iniziò alla solfatara di Pozzuoli. L'A. di questa Nota, due anni or sono, ebbe il piacere un giorno di prendere parte e coadiuvare il prof. Chistoni in queste misurazioni.

(2) È noto che vi è relazione tra la qualità dei prodotti emessi dalle fumarole e la loro temperatura: per es. le fumarole prevalentemente acquose hanno una temperatura sotto i 100°, quelle acide e contenenti sali ammoniacali segnano al termometro da 200° a 500°: infine quelle a cloruri alcalini hanno temperature tra i 500° ed i 1000°.

(3) Probabilmente una maggiore attività delle fumarole durante i minimi barometrici.

La pirometria ha negli ultimi anni fatto dei progressi che i vulcanologi dovrebbero conoscere e seguire. Il suo merito non è di avere trovati metodi più rigorosi che pel passato; ma di averne escogitato dei più pratici. Niun metodo moderno ha sorpassato in sensibilità il metodo del termometro a gas a bulbo di porcellana o di platino-iridio, il metodo chimico basato sulla densità dei vapori di iodio o di mercurio, il metodo calorimetrico a masse poco fusibili e dal calore specifico ben noto, il metodo acustico che dà la temperatura in funzione della lunghezza d'onda che un tono produce nell'aria riscaldata. In campagna però questi metodi non sono pratici, e se il Bartoli seppe valorosamente impiegarli in faccia alle lave fluenti, ciò non costituisce la regola.

Dei metodi pirometrici a sistema pratico ne abbiamo che vanno scartati perchè poco esatti, ed altri che in campagna presentano difficoltà, ma difficoltà che si possono superare. Nel primo gruppo stanno taluni *pirometri a dilatazione lineare*: la sostanza impiegata è per lo più l'argilla, il cui coefficiente di dilatazione negativo dipende, si sa, anche dalla durata del riscaldamento. Al secondo gruppo appartengono tutti i restanti metodi e per incominciare i *pirometri a mercurio*. Quando un tubo termometrico contiene un gas neutro, la cui pressione cresce a misura che il mercurio si dilata, potrà segnare temperature assai superiori a quelle cui bolle il mercurio a pressione ordinaria. I termometri che costruisce il Fuess in vetro poco fusibile sono atti a sopportare delle pressioni fino a 30 atmosfere ed a segnare fino a 500°. Con speciali disposizioni potrebbero servire al nostro scopo. Il bulbo può anche farsi di quarzo (firma Dr. Siebert e Kühn in Hanau); nel Reichanstalt di Berlino se ne è confrontato uno, il quale segnava giusto fino a 710°: nell'interno si aveva allora una pressione di 60 atmosfere.

Migliore prova potranno forse fare in vulcanologia *i pirometri elettrici*, sia quelli a *resistenza*, sia quelli *termo-elettrici*. Occorrono peraltro alcune precauzioni. Una prima è di non impiegarli per temperature superiori ai 700°, e ciò tanto per evitare una sgraziata fusione degli isolanti, quanto perchè da quelle temperature in poi sono preferibili i metodi a radiazione. Le resistenze e le saldature devono essere ben isolate, onde i metalli volatili del focolare non le attacchino rapidamente. È infine indispensabile di verificare di tanto in tanto le costanti strumentali.

Nei pirometri a resistenza si utilizzano le variazioni della resistenza elettrica di un filo di Pt in funzione della temperatura. Si possono compendiare in una cassetta portatile le parti necessarie per stabilire questa variazione, e cioè la pila, il galvanometro ed il reostato. I galvanometri sono astatici, ad ago del tipo d'Arsonval, costruttori: Keiser e Schmidt; Siemens e Halske; Pellin; Wester; Appleyard; Officine Galileo; ecc. Le divisioni sono in microvolta. I reostati sono circolari, composti di un certo numero di bo-

bine da 1 Ohm caduna. Si legge la divisione corrispondente a due bobine successive e per interpolazione si ha il valore reale della resistenza. S'usano anche reostati a filo con variazione continua, avvolti sopra un piccolo cilindro di marmo. La resistenza ben isolata è protetta da una guaina di ferro che si potrà lanciare o piantare anche alla profondità di un metro nel terreno caldo. Questi pirometri hanno il vantaggio che il galvanometro può essere situato lontano dal focolare e possono così prestarsi alla registrazione meccanica.

I pirometri termo-elettrici si fondano sulla determinazione della F. E. M. generata da una coppia termo-elettrica esposta alla temperatura da misurare. Il galvanometro sarà ancora uno astatico, dei tipi sovraindicati ed in quanto alle coppie potrà scegliersi tra l'elemento Barus a Pt + Pt col 20 % d'iridio, o l'elemento Le Chatelier a Pt + Pt col 10 % di rodio. I fili sono saldati per fusione ossidrica. L'*European electrical instrument C°*. Newark fornisce l'apparato portatile del Schöntjes: la casa Keiser e Schmidt quello Le Chatelier che più facilmente può essere campionato dal Reichanstalt di Berlino. In essi si legge direttamente la corrente generata sopra un circuito di poca resistenza. Il metodo d'opposizione che s' impiega coi pirometri che fabbricano le Officine Galileo di Firenze ci sembra preferibile. Esso consiste nel determinare la porzione di una F. E. M. fissa (data da una pila costante) che occorre introdurre in circuito per bilanciare esattamente, attraverso un reostato ed un galvanometro molto sensibile, quella data dalla coppia termo-elettrica.

Alla determinazione delle temperature delle fumarole questi metodi provvedono a sufficienza e proseguiti per un certo tempo, ed associati a sistematiche determinazioni della quantità degli aeriformi svolta nell'unità di tempo in m. c. quali si possono effettuare con un contatore portatile, permetteranno forse, e sia lecito sperarlo, di argomentare qualchecosa sull'andamento delle tensioni interne del vulcano.

2) *Determinazione delle temperature delle lave e delle scorie.* Quando la temperatura delle deiezioni vulcaniche sarà così alta da impartire loro l'incandescenza, e quando le condizioni sotto cui quelle si possono osservare soddisfano alla legge di Lambert, crediamo sia meglio ricorrere ai *pirometri a radiazione.*

La formazione di un apparato eruttivo dà l'aspetto di un vasto campo in fiamme, dominato da riflessi rossastri. Le lave vi hanno in generale un color rosso vivo, qualche volta arrivano ad un' incandescenza abbagliante e si presentano di color bianco argenteo.

Il calore che emanano è tale che, a una distanza minore di 10 metri, non si può resistere a star loro dinnanzi. Le radiazioni termiche, nelle loro vicinanze, attivano i bolometri; le radiazioni ottiche affettano anche da lontano i fotometri e si può arrivare cogli uni e cogli altri, a conoscere la tem-

peratura della sorgente incandescente, perchè per le sostanze che si possono considerare nere (1), corrono tra le radiazioni ottiche e le termiche delle relazioni note.

Questi metodi *fotometrici* e *bolometrici*, si suddividono alla lor volta in *metodi a superficie* ed in *metodi spettrali*.

L'occhio esercitato, in prima approssimazione può scindere l'incandescenza delle lave nelle 10 tonalità convenzionali, dal rosso nascente al bianco splendente. Pouillet determinò la temperatura corrispondente alla prima tinta in 525°; e per le altre successivamente: 700°, 800°, 900°,... 1500°.

Col *fotometro a superficie* (tipi Le Chatelier, Holborn e Kurlbaum, Weber, ecc.) si farà variare l'intensità della lampada campione fino a ridurla eguale a quella che avrà la lava incandescente. Questa lampada sta nel foco dell'obbiettivo di un cannocchiale attraverso al quale giunge anche la luce emessa dalla lava. L'osservatore, attraverso l'oculare, vede sovrapporsi i due bagliori e li dovrà rendere uguali con metodi acconci, per es., variando le resistenze del circuito elettrico della pila (2). Si istituiranno allora misure relative di intensità di luce prodotte dalle radiazioni ottiche della lampada e da quelle di un corpo nero riscaldato a nota temperatura.

Antesignane sono le esperienze del Rossetti colla pila Melloni. Ancora servirebbero egregiamente alle determinazioni di temperatura delle lave. In uso è però oggi il *bolometro a superficie*, tipo Wilson-Gray, al quale si applica la legge di Stefan sull'energia totale emessa da un corpo assolutamente nero. La legge si esprime colla relazione:

$$\int_0^\infty E(\lambda T)d\lambda = CT^4$$

e vale fino a 1500°. L'apparecchio consiste in un cannocchiale ad obbiettivo di spato fluoro. Nel fuoco di esso obbiettivo le cose sono così disposte che la saldatura di un termo-elemento ferro-costantana fà da radiomicrometro. Si eseguiscono misure relative di intensità di corrente, prodotte dalle radiazioni della lava vicina e da quelle di un corpo nero a nota temperatura.

Tra i *fotometri spettrali*, quello di Warner e Paschen funziona da pirometro. Questo apparato lascia solo entrare raggi entro dati limiti di lunghezza di onda. Se E_0 è l'intensità luminosa di una lampadina da 6 Volta

(1) E la lava si trova in queste condizioni: ha cioè per moderate temperature un coefficiente d'emissione prossimo all'unità.

(2) Un artificio permette di operare anche alle grandi distanze alle quali il campo apparente della lava incandescente non arriva ad interessare l'intero campo visivo del cannocchiale. Consiste nel creare attorno all'immagine della lava una luminosità artificiale di splendore intrinseco eguale a quello della lava stessa.

di cui si conosce la temperatura T, esso fotometro dà il rapporto $\frac{E}{E_0}$, E essendo l'intensità luminosa dei raggi a data lunghezza d'onda dei prodotti vulcanici incandescenti. La temperatura T si potrà ricavare dalla formola di irradiazione:

$$\lg \frac{E}{E_0} = \frac{c}{\lambda}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

ove le T indicano temperature assolute, c è una costante. Per temperature altissime si prenderà per luce campione un disco di vetro smerigliato, illuminato a distanza fissa da una lampada ad amilacetato (1).

Infine nel *bolometro spettrale* per determinare la temperatura ci si vale della nota relazione:

$$\lambda_m T = \text{costante},$$

λ_m è la lunghezza d'onda a cui nello spettro corrisponde il massimo d'intensità termica. Il valore di T risente dell'incertezza della costante, la quale fu trovata oscillare tra i due valori 2940° pei corpi assolutamente neri e 2626° pel platino.

Con questi metodi a radiazione si potrà studiare quel fattore principale del dinamismo delle lave che è la temperatura fino ai suoi valori più alti. Le osservazioni proseguite durante il periodo del raffreddamento potranno dare anche il coefficiente di conducibilità calorifica esterna delle lave *in sito*.

(1) Anche il *fotometro spettrale* del Fery funziona da pirometro d'assorbimento. Tra larghi limiti di λ, l'intensità ha l'espressione:

$$J = Ae^{-\frac{a}{T}}$$

Mediante un mezzo assorbente, di solito mediante delle lastre cuneiformi più o meno trasparenti e dello spessore variabile x, si riduce lo splendore delle lave eguale a quello i della sorgente di confronto. Sarà:

$$i = Je^{-bx}$$

b essendo il coefficiente di assorbimento di quelle lastre. Dalle due formule ora scritte risulta la terza:

$$x = p - \frac{q}{T},$$

p e q sono fattori di proporzionalità che, analogamente a quanto si fa cogli altri pirometri a radiazione, si determineranno empiricamente valendosi dell'irradiazione di un corpo nero la cui temperatura si misura a parte. Conosciute queste costanti, e noto x, si potrà ricavare il T.

Chimica — *Casi limite fra polimorfismo ed isomeria* (1). Nota di R. Ciusa e M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Recentemente vennero preparate varie sostanze contenenti un doppio legame — CH : N — le quali si presentano sotto due forme facilmente trasformabili l'una nell'altra, e per le quali si ricorse ai più delicati criterî proposti finora per distinguere se si tratti di casi di polimorfismo o di isomeria. Per alcune di queste sostanze, malgrado ogni considerazione, permangono a nostro avviso dei dubbî sulla natura del fenomeno; e poichè noi stessi abbiamo potuto osservare casi nei quali tali dubbî sono ancor più fondati, così reputiamo utile esporre qui alcune considerazioni d'indole generale che non crediamo prive di interesse. Anzitutto però vogliamo dire quali sono le particolarità delle sostanze da noi preparate.

1. *Metilfenilidrazone della* m-*nitrobenzaldeide.* — Si ottiene mescolando, a caldo, soluzioni alcooliche equimolecolari di metilfenilidrazina e *m*-nitrobenzaldeide, sotto forma di aghi rossi. Se però si cristallizza il composto così ottenuto dall'alcool bollente, esso si trasforma in una modificazione gialla, che all'analisi dà dei numeri corrispondenti a quelli richiesti pel metilfenilidrazone dell'aldeide *m*-nitrobenzoica.

$C_6H_5N . N : CH . C_6H_4NO_2$ Calc. C : 65,88 ; H : 5,09; N : 16,47
$\dot{C}H_3$ Trovato C : 65,32 ; H : 5,36; N : 16,37

La forma rossa dà pure gli stessi numeri:

Calcolato	Trovato
N : 16,47	N : 16,62

Il peso molecolare fu determinato sciogliendo la forma gialla in benzolo:

Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari (Calcolato 255)
0,282	0,055	256
0,988	0,195	261
1,974	0,295	257

Ritenemmo inutile fare una determinazione del peso molecolare della forma rossa, perchè, per evaporazione della soluzione benzolica della forma gialla, si ottiene appunto la modificazione rossa.

La modificazione gialla, *come la rossa*, fonde alla temperatura di 120-125°. Una miscela delle due forme, fonde alla medesima temperatura; se il liquido di fusione si lascia raffreddare si ha la forma rossa.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

Le soluzioni della forma gialla, fortemente raffreddate, depositano cristalli rossi, così pure per aggiunta di acqua fredda alle soluzioni alcooliche calde; si depositano cristalli rossi aggiungendo alla soluzione alcoolica delle due forme germi rossi. Certi solventi, come cloroformio e benzolo, trasformano la forma gialla in rossa (1). Il miglior modo per avere la forma rossa dalla gialla è quello di aggiungere etere alla soluzione satura della forma gialla in cloroformio.

La modificazione rossa passa alla gialla: 1) facendola bollire per un certo tempo con alcool o con etere acetico; 2) aggiungendo alla soluzione alcoolica calda un germe della forma gialla; 3) lasciandola a sè, meglio se immersa nell'acqua o nell'alcool. La luce non sembra abbia azione.

Se si fonde la forma gialla e si raffredda fortemente (a 0°), si forma una massa vetrosa; lasciata riscaldare lentamente, questa dà cristalli in gran prevalenza rossi, ma anche germi gialli. Rimanendo a temperatura ordinaria (20-25°) la massa diventa gialla in 3 giorni circa. Notevole il fatto che è necessario un contatto intimo fra germi gialli e cristalli rossi, affinchè la massa si trasformi. Cristalli rossi con germi gialli, mescolati in un mortaio, non si trasformano che dopo lunghissimo tempo.

Nelle soluzioni delle due forme non è possibile osservare alcuna differenza, anche subito dopo preparate, non solo nell'aspetto, ma anche coll'aiuto dello spettroscopio.

I due prodotti si addizionano ambedue al cloruro di picrile (2) per dare una medesima sostanza, fortemente dissociata anche in soluzione alcoolica concentrata; in questa maniera si ottiene sempre la forma rossa.

2. *Metilfenilidrazone della* p-*nitrobenzaldeide.* — Si prepara come il precedente; si separa rosso in principio, subito dopo giallo. Le due forme fondono entrambe a 130°:

	Calcolato	Trovato
$C_6H_5\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{\vert}{N}}.N:CH.C_6H_4.NO_2$	N % 16,47	N % 16,65

(1) Questo contegno delle due forme rispetto ai solventi ricorda assai da vicino il contegno degli idrazoni delle nitroaldeidi di E. Bamberger e O. Schmidt. Secondo questi autori dei solventi

$$\underbrace{\text{benzolo, cloroformio, ligroina}}_{\alpha} \qquad \underbrace{\text{alcool, acqua}}_{\beta}$$

i primi tre trasformano la forma β nella α; gli ultimi due invece trasformano la forma α nella β (Berichte *34*, 2001). È bene ricordare anche che, per le classiche ricerche di Claisen (Ann. *291*, 30), di Wislicenus (Ann. *291*, 179) e di Hantzsch (Berichte, *29*, 2256) sulla tautomeria, questi solventi nello stesso ordine hanno un'influenza notevole nella trasformazione di una forma tautomera nell'altra.

(2) R. Ciusa, questi Rendiconti, vol. XVIII, II, 101.

Svaporando rapidamente la soluzione benzolica della forma gialla si ottiene la forma rossa che però rapidamente si trasforma nella gialla. Per fusione e raffreddamento rapido, si hanno cristalli rossi i quali si trasformano lentissimamente nei gialli, purchè vi sia contatto intimo. Il passaggio nel colore fra le due forme è meno netto che nel caso precedente.

3. Il *metilfenilidrazone dell'o-nitrobenzaldeide* si ottiene allo stesso modo, fonde a 90° e non si può avere altro che in una modificazione rossa.

	Calcolato	Trovato
$C_6H_5N.N:CH.C_6H_4.NO_2$ (CH$_3$ in posizione 2)	N °/$_0$ 16,47	N °/$_0$ 16,50

Vogliamo far notare ora che si riscontra un passaggio graduale fra i tre composti nella stabilità della forma rossa: infatti l'*o*-derivato esiste nella sola forma rossa; il meta-derivato dà anche la modificazione gialla, che è la più stabile; il para-derivato esiste pure nelle due modificazioni gialla e rossa, ma quest'ultima è instabilissima a meno che non la si tenga in condizioni speciali (1).

Per ultimo vogliamo ricordare qui che il *p*-nitrofenilidrazone dell'aldeide *m*-nitroanisica (2) è giallo quando è perfettamente asciutto, e rosso all'aria umida: ed assume tale colore appena tolto dall'essiccatore. Riscaldato a 120° ridiventa giallo; riscaldato sotto acqua rimane rosso.

Quali sono le conseguenze teoretiche che si possono ricavare dalla conoscenza di questi fatti? A nostro avviso esse consistono in questo: che non possono sussistere fra polimorfismo e isomeria delle distinzioni così nette come varî autori si sono finora adoperati a mettere in evidenza. La conoscenza di nuove sostanze tende sempre più a cancellare quella distinzione: esaminiamo infatti il caso del metilfenilidrazone della *m*-nitrobenzaldeide alla stregua dei criterî suggeriti finora per distinguere polimorfismo e isomeria (3).

(1) Questi tre idrazoni erano stati già preparati da H. Labhart e R. V. Zembrzusky: il *p*-, ed il *m*-derivato (p. f. risp. 132° e 112°) sono stati descritti come formati da cristalli rossi; l'*o*-derivato (p. f. 77°) come intensamente colorato in rosso. Berichte *32*, 3060.

Il *m*-derivato è stato anche preparato da E. Bamberger e W. Pemsel per studiarne il contegno nella nitrosazione e descritto come un corpo rosso-arancio (p. f. 112-113°). Berichte, *36*, 373.

(2) R. Ciusa, questi Rendiconti, XV, II, 726.

(3) Ci sembra pressochè inutile fare osservare che non si può parlare di trasformazione della forma idrazonica nella forma azoica:

$$R.NH-N=C.R_1R_{11} \longrightarrow R.N=N-\underset{H}{C}.R_1R_{11}$$

pel fatto che nei nostri idrazoni manca l'idrogeno mobile:

$$C_6H_5N-N=CH.C_6H_4NO_2 \quad (CH_3 \text{ in posizione 2})$$

1. Secondo Bruni (1), applicando la regola delle fasi, si devono esaminare i punti di fusione delle miscele delle due forme. Vi sarebbe polimorfismo nel caso che le miscele dessero un punto di fusione unico, proprio di una delle due forme; isomeria se i punti di fusione fossero diversi da quelli dei componenti.

Orbene, nel nostro caso, non solo l'una delle forme si trasforma a contatto dell'altra (possibilità che era anche stata preveduta dal Bruni), ma i punti di fusione sono identici per ambedue e per le miscele. In un altro caso, osservato da Manchot e Furlong (2) e in altri ancora in cui si ammette l'isomeria, si avrebbe un punto di fusione unico per tutte le miscele perchè, pure avendo punti di fusione diversi, i due componenti si trasformano l'uno a contatto dell'altro.

2. Secondo Wegscheider (3) la distinzione è necessaria, benchè non chiara, e si basa sui seguenti criterî:

a) Diversità dei liquidi di fusione o dei vapori delle due modificazioni indica isomeria.

Nei due casi da noi descritti i liquidi di fusione sono identici, come pure le soluzioni; così avviene pure in un caso osservato da Anselmino (4), in cui è ammessa l'isomeria.

Riguardo alla diversità dei liquidi di fusione non ci pare inutile richiamare alcuni fatti noti, che ci sembrano dimostrare che anche in casi in cui si ammette il polimorfismo tale diversità può sussistere; inoltre un medesimo corpo cristallino può aversi da liquidi di fusione fra i quali si deve ammettere una diversità.

Infatti sono noti dei casi in cui soprariscaldando un liquido, o distillandolo, si può avere una forma cristallina piuttosto che un'altra (5).

Per le due forme dell'*o*-nitrotoluolo, Ostromisslenski (l. c.) ammette una speciale isomeria, benchè esse presentino tutti i caratteri di modificazioni polimorfe. Nei liquidi di fusione l'A. citato non riuscì ad osservare diversità alcuna; pure bisogna pensare che qualche carattere che ci sfugge, li distingua, potendosi da essi ottenere forme cristalline distinte.

Analoghi fenomeni presentano, secondo lo stesso autore, i seguenti corpi: *o*-clorotoluolo, *o*-toluidina, *o*-clorofenolo, *o*-bromotoluolo.

Tutti questi casi di dimorfismo verrebbero, come si è detto, spiegati ricorrendo ad una speciale isomeria; e qui si manifesta la tendenza a vedere delle relazioni fra la costituzione chimica e la forma cristallina: senza volere ora addentrarci a discutere più a fondo di questo argomento vogliamo

(1) Gazz. Chim. Italiana, 1903, I, 100.
(2) Berichte, XLII, 3030.
(3) Monatshefte, 1901, I, 334.
(4) Berichte, XL, 3394.
(5) Ostromisslenski, Zeitschrift für Physikalische Chemie, LVII, 341.

far notare che non vi sarebbe motivo di ragionare diversamente pei seguenti meta-derivati che sono dimorfi: resorcina, *m*-cloronitrobenzolo, *m*-dinitrobenzolo, *m*-bromonitrobenzolo; e così forse per altre serie di sostanze.

Nelle misure della velocità di cristallizzazione, si sono trovati dei casi in cui essa varia per ripetute fusioni, senza che ciò si possa attribuire ad alterazioni. Così, secondo Friedländer e Tammann [1], la velocità di cristallizzazione dell'anidride ftalica aumenta con successive fusioni, fino ad uu massimo; secondo Bruni e Padoa [2], pel *m*-cloronitrobenzolo si ha una diminuzione dopo ripetute fusioni, poi un aumento quando il corpo venga lasciato a sè per un certo tempo: ciò dimostra che quella diminuzione non era dovuta ad alterazione. Uno di noi [3] ha trovato che la velocità di cristallizzazione di certe soluzioni solide (miscele di *m*-bromonitro- e di *m*-cloronitrobenzolo; di *m*-bromonitro- e *m*-dinitrobenzolo) aumenta assai dopo un certo tempo dalla preparazione delle miscele.

b) Diversità dei derivati ottenuti dalle due forme, indica isomeria. Senonchè vi può essere isomeria anche quando i derivati sono identici, per la labilità di una delle forme.

c) La trasformabilità delle forme solide, escludendo solventi, sebbene prevalga nei casi di polimorfismo, si può notare, anche secondo Wegscheider, pure in casi di isomeria.

d) Vi è isomeria se la forma stabile vicino al punto di fusione ha il punto di fusione più basso. Nei due casi da noi descritti questo criterio non ha valore; così pure nel caso di Manchot e Furlong (l. c.) e forse in altri ancora.

e) Vi è isomeria se la modificazione più stabile è la più solubile o ha la tensione di vapore più grande. Nel primo dei casi da noi descritti la solubilità è identica per le due forme; nel secondo la labilità della forma rossa impedisce tali osservazioni.

f) Vi è isomeria probabile se le due forme forniscono i medesimi derivati con velocità molto diversa. Nel nostro caso non fu potuto osservare nulla di simile.

g) Se nelle soluzioni soprasature o nei liquidi soprafusi i germi cristallini delle due forme conducono allo stato d'equilibrio con velocità assai diverse, è probabile si tratti di isomeria. Nulla di tutto questo ci fu dato di osservare.

Dal complesso di questi raffronti non si ricavano criterî decisivi per le nostre sostanze; senonchè il paragone con fatti somiglianti nei quali si dovrebbe ammettere isomeria, verificati in composti analoghi, parlerebbe piuttosto a favore di questa.

(1) Ibidem, XXIV, 154.
(2) Gazz. Chim. Ital., 1904, I, 15.
(3) M. Padoa, questi Rendiconti, 1904, I, 333.

A complicare ancor più le cose in questo ordine di fatti, sopraggiunge ora la conoscenza delle sostanze fototrope; la estrema labilità delle modificazioni che la luce in esse produce, le strette relazioni che man mano vengono messe in rilievo fra struttura chimica e fototropia, la esistenza delle modificazioni soltanto allo stato solido, ed altri fatti ancora, costituiscono un insieme di caratteri fatti per assegnare a questi casi un posto intermedio fra il polimorfismo e l'isomeria.

Secondo noi non soltanto in questi casi, ma in molti altri ancora il fenomeno del polimorfismo si avvicina tanto all'isomeria e viceversa, che si può dire non esista un passaggio netto fra i due fenomeni; le relazioni fra struttura e le proprietà chimiche e fisiche sarebbero fino ad un certo punto dello stesso ordine: così la ricerca dei composti estremamente labili fra solvente e soluto è una prova della tendenza attuale a voler trovare i punti di contatto tra fenomeno fisico e fenomeno chimico, che nei casi estremi sono così profondamente differenti (1).

Chimica vegetale. — *Sul comportamento delle piante coi sali di litio* (2). Nota di C. Ravenna e M. Zamorani, presentata dal Socio G. Ciamician.

I più autorevoli trattati di biochimica e di fisiologia vegetale sono concordi nell'affermare che il litio è un elemento fortemente tossico per le piante superiori (3). Ciò risulterebbe segnatamente dalle vecchie esperienze di Nobbe (4) e da quelle ulteriori di Gaunersdorfer (5). È stato però osservato che i sali di questo metallo, usati in tenui dosi, possono riuscire utili alle piante agendo come stimolanti (6), ed inoltre che l'analisi spettrale rivela la presenza di litio in un numero considerevole di vegetali (7).

Mentre, qualche tempo fa, eravamo occupati in una ricerca sulle ceneri di tabacco, avemmo occasione di verificare che nelle foglie di esso, il litio è

(1) Avevamo già scritto questa Nota, quando comparve nell'ultimo fascicolo del Berichte, pag. 4527, una Nota di A. Fock, intitolata: *Polimorfismo e isomeria*, nella quale sono svolte considerazioni che vengono ad avvalorare il nostro modo di vedere. Ci riserbiamo di ritornare prossimamente sull'argomento.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Università di Bologna.

(3) Czapek, *Biochemie der Pflanzen*, vol. II, pp. 843 e 846 (1905); Pfeffer, *Pflanzenphysiologie*, 2ª ediz., vol. I, pp. 423-424 (1897).

(4) Landw. Versuchstat. *13*, 399 (1871); Czapek, loc. cit.

(5) Landw. Versuchstat. *34*, 175 (1887); Czapek, loc. cit.

(6) Loew, Nagaoka, Aso ed altri, vedi ref. Bull. tecnico del R. Ist. sper. di Scafati, 1904 e 1905.

(7) E. Tschermak, Biedermanns Central-Blatt, *29*, 645 (1900).

contenuto in quantità tale, da essere marcatamente svelata mediante la colorazione della fiamma. Ci venne allora il dubbio che l'elemento in questione non dovesse avere, almeno per quella pianta, un'azione tanto nociva, ed istituimmo alcune esperienze per vedere quale fondamento avesse la nostra supposizione.

Facemmo la coltura di alcune piante di tabacco (Kentucky) in soluzioni acquose, ed eseguimmo tre serie di esperienze: la prima, con soluzione completa, senza litio (testimone); la seconda, con soluzione completa, a cui era stato aggiunto un sale di litio; la terza, in cui il litio sostituiva il potassio.

Le soluzioni adoperate per le tre serie contenevano rispettivamente per litro:

Prima serie		Seconda serie		Terza serie	
$Ca(NO_3)_2$,	gr. 1,00	$Ca(NO_3)_2$	gr. 1,00	$Ca(NO_3)_2$	gr. 1,00
KH_2PO_4	» 1,00	KH_2PO_4	» 1,00	$Ca(H_2PO_4)_2$	» 0,60
$(NH_4)_2SO_4$	» 0,25	$(NH_4)_2SO_4$	» 0,25	$(NH_4)_2SO_4$	» 0,25
$MgSO_4$	» 0,20	$MgSO_4$	» 0,20	$MgSO_4$	» 0,20
$FeSO_4$	» 0,10	$FeSO_4$	» 0,10	$FeSO_4$	» 0,10
$MnCl_3$	» 0,10	$MnCl_3$	» 0,10	$MnCl_3$	» 0,10
$CaCO_3$	» 1,00	$CaCO_3$	» 1,00	$CaCO_3$	» 1,00
$ZnCl_2$	traccie	Li_2SO_4	» 2,00	Li_2SO_4	» 2,00
		$ZnCl_2$	traccie	$ZnCl_2$	traccie

La coltura fu iniziata in giugno ed al principio tutte le piante apparvero in ottime condizioni di vegetazione; lo sviluppo del sistema radicale fu assai abbondante in tutte e tre le serie. Verso la fine dello stesso mese, si cominciò però a notare nelle piante della seconda e della terza serie una tendenza ad assumere aspetto clorotico: le foglie si accartocciarono e divennero quasi bollose, tanto che disperavamo ormai di poterle mantenere ulteriormente in vita dati i manifesti segni di sofferenza. Trascorso tale periodo di crisi, invece, tutte le piante ripresero il bel colore verde; ma mentre quelle della terza serie non si svilupparono ulteriormente, evidentemente per la mancanza di potassio, quelle della seconda ripresero normalmente la vegetazione e, scomparsi completamente i fenomeni di ripiegatura e bollosità del parenchima fogliare, raggiunsero in breve lo stato di vegetazione relativamente florido (dato il mezzo di coltura) delle piante testimonî.

Alla fine di agosto, le piante della seconda serie, avevano completato normalmente, come i testimonî, il loro ciclo vegetativo; quelle della terza, per la ragione anzidetta, si mantennero in uno stato di vegetazione stazionario, ma le foglie rimasero sempre verdi e turgide. A quest'epoca, le piante vennero tolte dalle soluzioni, pesate, seccate e incenerite.

Si ottennero i seguenti risultati:

		1ª serie	2ª serie	3ª serie
Numero delle piante		3	3	3
Peso delle piante allo stato verde .	gr.	178,0	81,5	55,0
Peso delle piante allo stato secco .	»	23,6	15,7	7,0
Peso delle ceneri	»	3,0950	2,2412	1,3670
Cenere, per 100 di sost. secca . . .		13,11	14,27	19,53

Era nostra intenzione di dosare il litio contenuto nelle piante trattate coll'elemento studiato, ed inoltre di determinare la quantità dello stesso corpo nelle foglie di individui sviluppatisi normalmente nel terreno. Per questa ultima analisi si adoperarono gr. 39,8 di foglie secche, da cui si ottennero gr. 5,0136 di cenere. Disgraziatamente l'analisi delle ceneri della seconda serie andò perduta; ci siamo quindi dovuti limitare agli altri due dosaggi.

La determinazione fu eseguita secondo il metodo di Gooch (1) che si basa sulla separazione del cloruro di litio dai cloruri di potassio e di sodio, per mezzo dell'alcool amilico. Il litio si pesa poi allo stato di solfato.

I risultati ottenuti furono i seguenti:

Per le piante della terza serie:

Gr. 1,3670 di cenere, diedero gr. 0,1642 di Li_2SO_4.

In 100 parti di cenere	Li trovato	1,53
In 100 parti di sostanza secca . . .		0,30

Per le piante cresciute in terreno normale:

Gr. 5,0136 di cenere, diedero gr. 0,0231 di Li_2SO_4.

In 100 parti di cenere	Li trovato	0,06
In 100 parti di sostanza secca . . .		0,007

L'esame dei risultati di queste esperienze, ci porta dunque alla conclusione che, per il tabacco, il litio non è elemento molto velenoso. La quantità di litio adoperata nella soluzione è infatti abbastanza elevata; circa uguale alla quantità di potassio che si adopera nei comuni liquidi nutritivi. Ciò malgrado, le piante che avevano a disposizione tutti gli elementi necessarî, sebbene abbiano risentito qualche danno per la presenza del litio, come ci indica il peso allo stato verde e secco, pure poterono giungere, nor-

(1) Vedi Treadwell, *Lehrbuch der analitischen Chemie*, vol. II, pag. 42 (1902).

malmente, a fioritura e fruttificazione. La determinazione nelle piante della terza serie ci indica poi che il litio può venire assorbito, senza esercitare una azione fortemente tossica, in misura abbastanza elevata. Infatti, se le piante non poterono svilupparsi per l'assenza di un elemento a loro indispensabile, pure si mantennero, per lungo periodo di tempo, in uno stato di piena vitalità.

I risultati ottenuti, ci hanno incoraggiato a tentare l'esperienza su altre piante. Abbiamo prescelto ancora una solanacea, la patata; poi il fagiolo comune e l'avena.

Per le prove colle patate, abbiamo inoculato nei tuberi un grammo di solfato di litio, praticando una ferita che veniva poi richiusa con paraffina. In una seconda serie abbiamo inoculato soltanto gr. 0,50 di sostanza; in una terza, gr. 0,25; in una quarta, gr. 0,125; e finalmente nell'ultima, soltanto traccie. I tuberi vennero piantati in vasi contenenti esclusivamente sabbia quarzosa e inaffiati periodicamente con acqua. Alcuni tuberi, usati per testimonî, furono inoculati con glucosio, perchè le condizioni di esperienza fossero simili.

La piantagione fu eseguita il 25 luglio ed i primi germogli comparvero, per le piante trattate col litio, il 20 agosto, con anticipazione di sei giorni sui testimonî. Lo sviluppo rigoglioso ed il compimento regolare del ciclo vegetativo, ci dimostrarono che neppure in questo caso il litio ebbe ad esercitare alcuna azione venefica.

Contemporaneamente alla esperienza ora descritta, eseguimmo quella coll'avena ed i fagioli, che furono pure seminati in vasi contenenti sabbia quarzosa; alcune piante si inaffiarono, una volta per settimana, con soluzione nutritiva, contenente uno e mezzo per mille di solfato di litio; altre (testimonî) con soluzioni prive di questo corpo.

L'esperienza cominciò ai primi di agosto. La germinazione avvenne regolarmente per l'una e l'altra pianta sebbene il trattamento col litio fosse cominciato al momento della semina.

Per i fagioli, però, dopo un periodo di 32 giorni, si cominciò a notare un deperimento negli individui a cui era stato somministrato il solfato di litio ed in breve le piante si seccarono. Bisogna notare però che si era già inaffiato quattro volte colla soluzione ed in modo che il liquido versato fosse tutto trattenuto dal terreno; il che portava un forte aumento di concentrazione.

Per l'avena, i risultati furono simili a quelli ottenuti coi fagioli; soltanto il deperimento cominciò due mesi dopo la semina, quando cioè la soluzione di solfato di litio era, nel terreno, assai più concentrata che nell'esperienza precedente. Questa pianta fu quindi assai più resistente verso il litio, che i fagioli.

Avevamo intenzione di eseguire, tanto per i fagioli, che per l'avena, delle esperienze in soluzione acquosa, analogamente a quelle fatte per il

tabacco; ma la stagione ormai inoltrata non ci permise di condurle a termine.

Risulta, ad ogni modo, che per le due solanacee sperimentate, il litio non ebbe azione marcatamente nociva; esso invece danneggiò la vegetazione dei fagioli e dell'avena; ma probabilmente per la sua presenza in quantità elevata.

Continueremo questa ricerca anche per vedere, se almeno in parte, il litio possa eventualmente sostituire il potassio nella nutrizione delle piante.

Mineralogia. — *Su un notevole cristallo di scheelite di Traversella* (1). Nota del dott. Aurelio Serra, presentata dal Socio G. Struever.

Nella sua monografia della scheelite, il prof. Max Bauer (2) notava come tra le scheeliti delle molte località fino allora studiate, solo quella di Traversella presentava come forma costantemente ed assolutamente predominante la bipiramide ⟩111⟨, mentre in tutte le altre la forma che determinava l'*habitus* cristallografico era la bipiramide di seconda specie ⟩101⟨. Gli studî posteriori hanno fatto conoscere qualche altro giacimento nel quale la scheelite, come a Traversella, offre come dominante ⟩111⟨: così Dana (3) fece conoscere quella di Turnbull Co., Cathrein (4) quella del monte Mulat, Pelloux (5) del Sempione, Wada (6) di alcune località giapponesi.

Per la scheelite di Traversella i recenti lavori del dott. Colomba (7) e del prof. Zambonini (8) non hanno potuto che confermare, per quanto si riferisce al predominio di ⟩111⟨, le antiche osservazioni del prof. Bauer: Zambonini, anzi, stabilì che su 306 cristalli, ⟩111⟨ si presenta isolata in ben 205 e che ⟩101⟨, quando esiste, ha sempre facce piccole ed anzi in generale non presenta tutte le sue otto facce, ma un numero limitato, sovente soltanto una o due.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Sassari.

(2) *Krystallographische Untersuchung des Scheelits.* Jahresheft. Württ. Naturwiss. Gesellsch. 1871.

(3) *System of Mineralogy*, 1892, pag. 986, fig. 2.

(4) *Ueber einige Mineralvorkommen bei Predazzo* ecc. Zeitschr. f. Kryst. 1883, 8, 220.

(5) *Scheelite ed altri minerali rinvenuti in una roccia proveniente dal traforo del Sempione.* Boll. del Naturalista, XXI (1901).

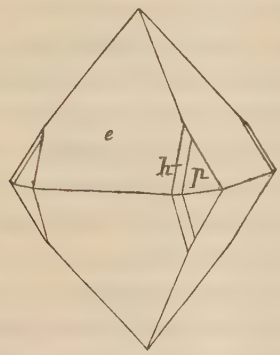
(6) Pogg. Ann. (1859), CVII, pag. 279.

(7) *Mineralien Japans (englisch von T. Ogawa, Tokyo 1904, 144 SS. und 30 Taf).* Zeitschrift für Kryst. 1907, pag. 286.

(8) *Sulla scheelite di Traversella.* Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. 1909, pp. 281-290.

Recentemente il prof. Zambonini ha avuto occasione di esaminare presso il prof. Pochettino un bel cristallo di scheelite di Traversella di *habitus* del tutto diverso da quello finora noto per i cristalli di quella località, ed egli gentilmente me ne ha affidato lo studio, del che vivamente lo ringrazio.

Il cristallo in questione ha il solito aspetto dei cristalli di Traversella, misura 1 cm. nella direzione dell'asse c, è di colore giallo-miele scuro in alcuni punti, un po' rossiccio in altri. Le misure goniometriche eseguite hanno dimostrato che le forme in esso esistenti sono $e\{101\}$, $p\{111\}$, $h\{313\}$, delle quali $\{101\}$ è di gran lunga la più estesa (fig.), al contrario di quanto finora è stato osservato a Traversella.



Come risulta dalla figura, il cristallo che si descrive ha l'*habitus* comune dei cristalli di scheelite di quasi tutte le località studiate di questo minerale. Le facce di $\{101\}$ sono profondamente striate parallelamente agli spigoli di combinazione con $\{111\}$ e permettono solo misure approssimative; io ho trovato:

$$(101) : (10\bar{1}) = 66° 10'$$

mentre il valore teorico in base alla costante $c = 1{,}5356$ stabilita da Dauber [1] è 66° 9'.

Nei cristalli ordinarî di Traversella, nei quali domina $\{111\}$ le facce di questa forma sono quasi sempre striate parallelamente agli spigoli di intersezione di $\{111\}$ e $\{101\}$ e, secondo Colomba, anche perpendicolarmente agli spigoli orizzontali di $\{111\}$. Nel cristallo di cui ci occupiamo, le facce di $\{111\}$ sono perfettamente piane e speculari e non mostrano sensibile striatura: presentano, invece, delle figure di corrosione naturali, triangolari analoghe a quelle osservate da Wada nella scheelite di Otomeraka e Kanayama.

[1] *Appunti sulla scheelite di Traversella.* Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. 1909, pp. 558-565.

Le misure eseguite, assai esatte, hanno dato:

$$\{111\} : (11\bar{1}) = 49°\,30' \qquad 49°\,27' \text{ mis.} \qquad 49°\,28' \text{ calc.}$$

{313} ha faccie di varia grandezza, ma sempre affatto subordinate, che hanno permesso delle buone misure:

$$\{111\} : \{313\} = 23°57' \qquad 24°\,22' \text{ mis.} \qquad 23°\,55' \text{ calc.}$$

Come si vede, benchè le misure sieno buone e concordanti, la differenza tra esperienza e calcolo è considerevole: migliore accordo si avrebbe qualora si assumesse invece di {313} il complicatissimo simbolo {35 . 12 . 35}.

Il cristallo descritto presenta un notevole interesse per il fatto che dimostra che nella formazione della scheelite di Traversella devono distinguersi diversi periodi: uno, che è quello di gran lunga più importante, nel quale le condizioni di formazione del minerale erano tali da determinare il predominio della bipiramide {111}; un altro, molto più limitato, nel quale si sono originati i cristalli come quello studiato, eccezionali per Traversella. I lavori nuovamente intrapresi nella miniera di Traversella permetteranno forse di scoprire l'esatta giacitura dei cristalli del tipo ricordato e di precisare le possibili differenze nella paragenesi rispetto al tipo usuale.

Nelle località che hanno fornito cristalli di scheelite con {111} dominante, generalmente manca il tipo caratterizzato dal forte sviluppo di {101}: finora soltanto Wada aveva osservato nella scheelite di Sannatake, provincia di Bunzo, che mentre generalmente {111} era più estesa di {101}, in qualche raro caso accadeva il contrario. Anche a Traversella viene ora per la prima volta accertata la promiscuità dei due tipi. Che il cristallo esaminato provenga effettivamente da Traversella, è fuori di ogni dubbio non solo per il suo aspetto, ma perchè il prof. Pochettino lo ebbe dal compianto prof. Alfonso Sella, il quale lo aveva tolto dalla collezione di suo padre, l'illustre Quintino Sella, che così bene conosceva il giacimento di Traversella.

Botanica. — *La partenocarpia nel Diospyros virginiana L.* Nota di B. Longo, presentata dal Socio R. Pirotta.

Nello scorso anno sopra diverse piante a fiori diclini dell'Orto Botanico di Siena feci l'esperimento d'impedire la impollinazione in alcuni loro fiori pistilliferi. Tra le piante sottoposte all'esperimento erano anche due esemplari pistilliferi di *Diospyros virginiana* L. di cui soltanto ad una dozzina di fiori (sei per ciascuna delle due piante) fu impedita la impollinazione. Con mia meraviglia tutti e dodici i fiori di detto *Diospyros* allegarono ugualmente bene come gli altri delle stesse due piante ai quali non era stata preclusa la impollinazione: durante l'estate i loro ovarii crebbero come quelli

degli altri fiori e nell'autunno essi si erano trasformati in frutti che non si potevano distinguere dagli altri che si trovavano sulle stesse due piante; però, raccolti insieme con essi ed aperti, mentre quelli provenienti dai fiori impollinati contenevano grossi semi abboniti (1), nei suddetti dodici frutti mancavano del tutto i semi forniti di embrione ed endosperma ed al loro posto si trovavano soltanto delle laminette brune, coriacee — resti degli ovuli non fecondati. Contrariamente a quanto avevo supposto durante l'esperimento, non si trattava quindi nè di partenogenesi nè di apogamia nè di sviluppo avventizio dell'embrione, ma esclusivamente di quel fenomeno contraddistinto col nome di *partenocarpia*, ossia formazione senza impollinazione di frutti privi di semi o con semi sterili.

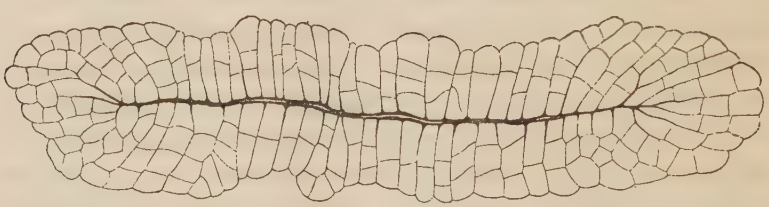
Ma volli fare l'esperimento ancora più in grande e fissare inoltre il materiale nei diversi stadî per studiarlo anche microscopicamente, tanto più che tutti e dodici i fiori sperimentati li avevo lasciati andare avanti fino alla maturazione dei frutti e soltanto avevo fissato del materiale proveniente dagli altri fiori fecondati. Quest'anno, infatti, dei *Diospyros* che si coltivano nell'Orto Botanico di Siena, all'infuori dei due esemplari pistilliferi di *Diospyros virginiana* L. che furono lasciati intatti, io feci scapitozzare tutti gli altri staminiferi. Di più mi assicurai che nei dintorni non si coltivassero altri esemplari staminiferi di *Diospyros*. Inoltre intorno all'esemplare più alto feci costruire un palco per poter visitare agevolmente i fiori, bastando allo scopo per l'altro, più basso, uno scaleo. Con grande pazienza furono esaminati tutti i fiori per accertarmi se eventualmente si avesse presenza di qualche stame; anzi per eccesso di scrupolo fu da me fissato, imparaffinato e sezionato qualche appendice che trovai sugli staminodi per vedere se mai vi si trovassero dei granelli di polline. Ma le ricerche furono sempre negative. Negative del pari furono le ricerche di granelli di polline sullo stimma e di tubetti pollinici nello stilo, nell'ovario e nell'ovulo. Eppure i fiori allegarono benissimo ed in questo autunno, come in quello dell'anno passato, gli ovarî si sono trasformati in frutti. Ebbene in tutti i frutti raccolti maturi (ben 497 (2)) io non ho trovato un solo seme abbonito ma in tutti, come nei dodici ricordati dell'anno scorso, delle laminette brune — resti degli ovuli non fecondati.

Ho fatto anche delle ricerche per vedere la differenza che correva negli ovuli da dopo l'antesi in poi in paragone col materiale proveniente dai fiori impollinati.

(1) Alla primavera di quest'anno parecchi di questi semi messi in terra hanno germinato.

(2) A questo numero bisogna aggiungere i giovani frutti fissati in diversi stadî per lo studio.

Gli ovuli del *Diospyros virginiana* L. sono anatropi, pendenti, col micropilo rivolto in su e provvisti di due spessi tegumenti. Sono percorsi da un fascio vascolare il quale non si arresta nè si sfiocca in corrispondenza della calaza, ma si spinge nel tegumento esterno fin al disotto del micropilo. La nucella è piccola ed a completo sviluppo dell'ovulo è già per la maggior parte riassorbita dal sacco embrionale, restando soltanto alla base una piccola porzione con le pareti lignificate. Il sacco embrionale viene così a trovarsi in contatto con la serie interna delle cellule del tegumento interno, le quali costituiscono il *tappeto* differenziandosi dalle rimanenti per essere ricche di contenuto plasmatico ed allungate radialmente. All'antesi nel sacco embrionale si osservano i due nuclei polari in contatto o, se fusi, con i nucleoli però distinti e l'apparato femmineo costituito dalle due sinergidi e dall'oosfera.



Sezione trasversale del tessuto proveniente dalla divisione della serie interna (tappeto) delle cellule del tegumento interno dopo il riassorbimento del sacco embrionale negli ovuli dei giovani frutti partenocarpici del *Diospyros virginiana* L. (Per semplicità sono state disegnate soltanto le pareti delle cellule. Da preparato colorato con Ematossilina Delafield e Sudan III. Ingr. 190).

Or bene, mentre gli ovuli fecondati si accrescono molto ed in essi si sviluppano normalmente l'embrione e l'endosperma, in quelli non fecondati, che pur si accrescono alquanto, gli elementi del sacco embrionale vanno a male. Inoltre, fatto che sorprende, in questi ovuli in cui il sacco embrionale va a male gli elementi del tappeto si dividono mediante pareti tangenziali ed in seguito a questa divisione le pareti interne cutinizzate delle cellule del tappeto vengono fra loro in contatto e si viene alla formazione di un tessuto che riempie il posto prima occupato dal sacco embrionale e che — come si vede bene tanto nelle sezioni trasversali (v. figura), come in quelle longitudinali — spicca in mezzo agli altri elementi andati a male del tegumento interno, tanto che ad una semplice osservazione superficiale si prenderebbe per tessuto endospermico!

Questo comportamento delle cellule del tappeto trova grande analogia con quel che si osserva in certe lesioni di organi vegetali, in cui, come è noto, le cellule circostanti a quelle lese si moltiplicano fino a produrre un tessuto che va ad otturare la ferita. La divisione del tappeto però è indipendente da qualsiasi azione esterna; essa è indotta dalla morte naturale

del sacco embrionale come ce lo prova il fatto che il tappeto presenta questo comportamento in quegli ovuli in cui per mancata fecondazione il sacco embrionale va a male.

Il *Diospyros virginiana* L. è dunque un'altra pianta partenocarpica ed è il secondo caso nel genere *Diospyros* essendo stata trovata la partenocarpia nel *Diospyros Kaki* L. f. tanto nel Giappone dal Tamari (1) come in Europa dal Wettstein (2).

Queste ricerche di partenocarpia nelle piante da frutto io credo che siano interessanti, oltre che dal punto di vista scientifico — avendo noi in questi casi il fatto anormale che la parete ovarica senza l'impulso della fecondazione e persino senza quello della impollinazione si trasforma in pericarpo —, anche da quello pratico giacchè quando noi sapremo ad es. quali piante, dioiche o ginodioche, sono partenocarpiche, noi potremo — con guadagno in economia ed in qualità del prodotto — coltivare esclusivamente gl'individui pistilliferi.

Patologia vegetale. — *Osservazioni sopra alcune malattie dell'olivo.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

I. *Nuova specie di Phyllosticta sulle foglie giovani dell'olivo.* — Nel luglio e nell'agosto di quest'anno (1909) sono pervenuti dai dintorni di Terni alla R. Stazione di Patologia vegetale dei campioni di rametti di olivo mostranti le foglie apicali col lembo più o meno profondamente deformato e cosparso di numerose macchie circolari di secco (fig. 1). Il diametro di queste macchie oscilla intorno al millimetro, presentano spesso un orlo ben distinto colorito in bruno, dato da una zona di sughero circolare che separa nettamente la parte alterata dal resto della lamina fogliare ancora sana. In alcune di queste macchie ho potuto osservare dei picnidi neri, sferoidali, piccolissimi, appartenenti a una *Phyllosticta* non ancora descritta. Questi organi di fruttificazione si formano in numero esiguo, soltanto 2 o 3 per ogni macchia. Le sezioni, eseguite attraverso a quelle zone di tessuto che presentano l'inizio dell'alterazione, mostrano già la presenza di un micelio ialino poco sviluppato, il quale origina molto tardi i picnidi sotto l'epidermide superiore. Il soggiorno delle foglie in camera umida non provoca la formazione dei picnidi nelle macchie che ne sono prive. Questo fatto si verifica per

(1) Tamari K., *A propos du fruit du Diospyros Kaki*. [In giapponese]. Bull. d. l. Soc. d'Agriculture du Japon, nn. 233-234, fév. et mars 1901, dal Ref. in Bot. Centralblatt, Bd. XCII (1903), pag. 533.

(2) Wettstein R. (v.), *Uber Parthenokarpie bei Diospyros Kaki*. Osterreich. bot. Zeitschrift. Jahrg. 1908, n. 12.

altre specie di *Phyllosticta*, per le quali la formazione dei picnidi è determinata da condizioni speciali, difficilmente riproducibili artificialmente.

Anche la nervatura mediana delle foglie è spesso colpita. L'effetto immediato della penetrazione del micelio tanto nel lembo che nella nervatura è l'arresto di ogni ulteriore sviluppo dei tessuti invasi, da ciò viene l'irregolarità dell'accrescimento della foglia che diventa contorta, ondulata, a contorno sinuoso (fig. 1).

Gli attacchi di questa *Phyllosticta* si sono manifestati principalmente nei dintorni di Terni (Collescipoli, Colle dell'Oro, Piedimonte) in piante colpite dai geli primaverili, ma anche da altre parti dell'Italia centrale sono pervenuti rametti di olivo con le foglie giovani presentanti identiche alterazioni (provincia di Siena, dintorni di Frosinone).

Fig. 1.

In un'altra Nota (1) ho già fatto conscere le alterazioni prodotti da una altra specie di *Phyllosticta*, dalla quale è ben facile riconoscere quella ora descritta, per il gran numero di macchie in una stessa foglia, per la forma e il piccolissimo diametro di quest'ultime.

I caratteri diagnostici della nuova specie possono essere riussunti come segue: *Phyllosticta Oleae* n. sp. — *Maculis amphigenis, circularibus, minutis* (1 mm. circ. diam.), *initio ochraceis, dein albescentibus, annulo fusco cinctis; pycnidiis epiphyllis, atris, globosis, punctiformibus, paucis, sparsis, 60-80 μ diam.; sporulis bacillaribus, hyalinis, μ 0.3-0,4 ⩽ 2,5-3.*

Hab. *in foliis vivis junioribus Oleae europeae pr. Terni.*

II. *Un caso di batteriosi delle olive.* — Nell'estate scorsa ho avuto l'occasione di esaminare delle olive, provenienti da Terni (Collescipoli), le quali mostravano, nel pericarpo, delle alterazioni profonde. Sulla superficie esterna, generalmente raggrinzita, si notavano delle macchie di forma irre-

(1) *Sul disseccamento delle foglie dell'olivo prodotto dalla Phyllosticta insulana* Mont. (Cfr. questi Rendiconti, vol. XVIII, 1909, pag. 620).

golare, brune, quasi nere. Per alcune di queste drupe potei accertare la presenza di profonde cavità lisigeniche ripiene di batteri. Questi cancri erano costantemente localizzati alla base delle olive lungo il percorso del cordone fibro-vascolare che dal peduncolo penetra nel mesocarpo.

L'inizio dell'infezione, forse prodotta da punture d'insetti, si verifica nelle cellule dell'epicarpo a pareti più sottili che sono ricoperte dal calice. Le grosse lacune internamente al mesocarpo si formano a spese delle cellule parenchimatiche e nelle olive ancora giovani anche molte cellule dello pseudo-endocarpo sono invase dai batteri e distrutte, giacchè ancora gli elementi sclerosi non costituiscono per intero questo tessuto.

Tagliando per metà un'oliva infetta da batteriosi si vede nella regione basale una materia mucillagginosa bianca far salienza sulla superficie del taglio. Esaminata al microscopio questa sostanza si mostra costituita da una colonia gelatinosa di batteri e da una grande quantità di cristalli aghiformi di ossalato calcico. Le sezioni microscopiche mostrano come a un certo periodo dello sviluppo della colonia batterica a spese delle cellule parenchimatiche, nell'interno della cavità, si accumulino numerosi cristalli di ossalato, disposti in direzione radiale, e uniformemente tappezzanti le pareti della cavità stessa.

I batteri sono molto piccoli (μ 1,2-1,5 $\leqslant$ 0,6-0,7) brevi, quasi cocciformi, immobili. Non restano coloriti col metodo di Gram.

Uno degli effetti di questa batteriosi è la formazione di gomma nei vasi del legno, che si manifesta anche ad occhio nudo sul piano di sezione delle drupe attaccate, come una linea gialla segnante il limite fra pseudo-endocarpo e mesocarpo. Questa linea è appunto costituita dal reticolo dei fasci fibro-vasolari. I batteri sembra che non penetrino nei vasi come avviene invece nei casi assai rari di rogna delle olive. Io sono d'opinione che causa principale di questa batteriosi, come delle altre alterazioni del mesocarpo, dove non ho trovato nè funghi nè batteri, siano gli abbassumenti di temperatura che si sono verificati durante il primo periodo dello sviluppo delle olive. Nell'estate ventura cercherò di determinare sperimentalmente l'attendibilità di questa supposizione.

III. *Le alterazioni anatomiche prodotte dalla Pollinia Pollinii* (Costa) Targ. *sopra i rami dell'olivo.* — Sotto il nome di galle, tubercoli, sono indicati spesso nei trattati di entomologia agraria i follicoli della *Pollinia Pollinii*, fissati alla corteccia dei rami d'olivo; e ordinariamente la descrizione e le figure relative sono tali da lasciare nell'incertezza il lettore se le cosiddette galle o tubercoli sieno vere produzioni della pianta, formatesi sotto l'azione stimolante dell'insetto, o semplicemente una produzione del corpo di questo. Nella decorsa stagione sono pervenuti alla Stazione di Patologia vegetale dalla Liguria, Lago di Garda, Toscana, Umbria, Lazio, numerosi rami di olivo attaccati dalla *Pollinia*. Valendomi di questo abbon-

dante materiale ho voluto studiare le alterazioni istologiche che questa cocciniglia produce nei varî tessuti dei rami e delle foglie.

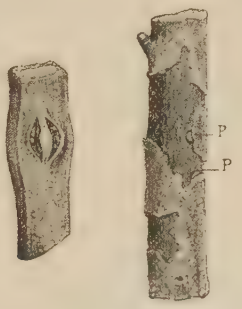
In seguito alle punture della *Pollinia* non si formano mai galle nè tubercoli nei quali l'insetto venga ad esser racchiuso. Il follicolo, voluminoso, che circonda il corpo della femmina matura, ha una superficie granulosa, spesso ricoperta da miceli bruni che si sviluppano anche sulla corteccia dei rami, in modo che l'aspetto esterno e il colore di questi follicoli sono simili a quelli della superficie corticale del ramo del quale sembrano essere una produzione.

Le alterazioni anatomiche che seguono alle punture della *Pollinia* si sommano spesso ai danni prodotti dal gelo e dal punteruolo (*Phleotribus Oleae*). Ordinariamente nell'Italia centrale e settentrionale sono le gelate tardive della primavera quelle che favoriscono l'attacco della cocciniglia, la quale in tal caso viene ad aggravarne notevolmente le conseguenze. Si possono distinguere quindi due sorta di alterazioni, quelle semplici, prodotte unicamente dalla *Pollinia* e quelle più complesse che derivano, oltre che dalle punture della cocciniglia, da un'alterazione precedente.

Le setole rostrali attraversano tutti i tessuti corticali, anche per una profondità di 700 μ, raggiungendo il cambio e generalmente il succhiamento avviene in corrispondenza dei punti d'affioramento dei raggi midollari. Nei rametti di quattro anni e più le setole rostrali riescono facilmente ad attraversare i due, tre e anche quattro anelli sclerenchimatici della corteccia, passando fra le lamelle mediane delle membrane ispessite. Un'abbondante secrezione viene a costituire una guaina continua, ialina ed elastica intorno alle setole, e nell'interno dei tessuti attraversati da quest'ultime si vede come un grosso cordone ondulato ripetutamente ramificato in vicinanza del cambio. Alla costituzione di questa guaina non prendono parte sostanze appartenenti al contenuto cellulare del tessuto corticale. Nel punto dove è fissato l'insetto tutti i tessuti indistintamente subiscono un rallentamento nello sviluppo e si forma una leggera depressione che si fa più marcata in seguito per una proliferazione del periderma e del collenchima, venendo a costituire un cercine intorno alla base del follicolo. I tessuti corticali e del cilindro centrale, che hanno subìto l'azione suggente della *Pollinia*, presentano più o meno presto dei gruppi di cellule necrosate, a contenuto e pareti ingiallite, i vasi del legno si riempiono di gomma e l'attività del cambio è arrestata in quel punto o varia l'ulteriore destino delle cellule neoformate, formandosi spesso del parenchima legnoso invece di elementi vasali e prosenchimatici. Il ramo attaccato subisce spesso in quel punto un appiattimento, come un principio di fasciazione. La penetrazione di miceli fungini nei tessuti alterati può determinare la formazione di piccoli cancri, spesso raggiungenti il legno. L'intervento di acari o di Poduridi che asportano le porzioni di tessuto necrosato scavandovi delle gallerie approfondi-

scono ed allargano la cavità, entro la quale possono venire a fissarsi le giovani larve della successiva generazione. Una condizione favorevolissima alla fissazione di questa cocciniglia sembra essere l'esistenza di anfrattuosità, di screpolature nella peridermide o di cavità più o meno profonde prodotte dalle cause più diverse.

Meno frequentemente la *Pollinia* produce alterazioni su rami ancora erbacei e sulle foglie. Le punture su questi organi in attivo accrescimento sono seguìte da un leggero rigonfiamento dovuto alla proliferazione del tessuto corticale e alla formazione abbondante di parenchima legnoso. Nella nervatura mediana delle foglie, sulla pagina inferiore, per le punture della *Pollinia* si formano pure leggeri ingrossamenti.



a Fig. 2. *b*

Ho detto come questa cocciniglia trovi nelle lesioni prodotte dal gelo e dal *Phleotribus* un substrato adatto alla sua vita parassitaria, è interessante vedere come l'alterazione iniziata dal freddo possa poi essere sfruttata dalla *Pollinia*. La figura 3 mostra, schematicamente, la sezione di un rametto di un anno colpito dal gelo, eseguita in corrispondenza del cancro rappresentato dalla figura 2 *a*. Le larve (p) si fissano nelle due screpolature che si sono formate nel parenchima corticale C. Mentre il fellogeno nei rametti normali si forma nel primo strato di cellule corticali poste immediatamente sotto l'epidermide, nei punti colpiti dal gelo la formazione della peridermide (P) avviene al disotto della zona di parenchima necrosato, e la produzione di cellule suberose è abbondantissima. È appunto per questa proliferazione della peridermide, del parenchima sottostante e del parenchima legnoso (Pl) che si forma un rigonfiamento ben visibile all'esterno. La parte del ramo che dà origine al cancro per alcuni caratteri diventa anatomicamente più adulta del rimanente, così le cellule sclerose (S) si formano in quella regione molto precocemente.

Il midollo (m) è interamente necrosato. Alcune di queste alterazioni sono dovute in parte alle punture della *Pollinia* come l'iperplasia dei tessuti corticali e la necrosi di molte cellule del parenchima amilifero profondo. La conseguenza ulteriore dell'attacco della cocciniglia su questi cancri super-

ficiali è quella di renderli assai più profondi o di estendere la disgregazione anche alla peridermide neoformata, provocando la formazione di successive screpolature longitudinali. Altre volte la disquamazione della peridermide iniziata dal freddo è notevolmente esagerata dalla *Pollinia*, fissandosi le larve sotto i lembi di tessuto suberoso già in parte staccati, e infiggendo le setole rostrali lungo la linea che limita il tessuto decorticato da quello ancora ricoperto dalla prima peridermide (fig. 2 *b*).

Nei tessuti limitanti l'interno delle gallerie del punteruolo in seguito alle punture della *Pollinia* avvengono complicate alterazioni, che ordina-

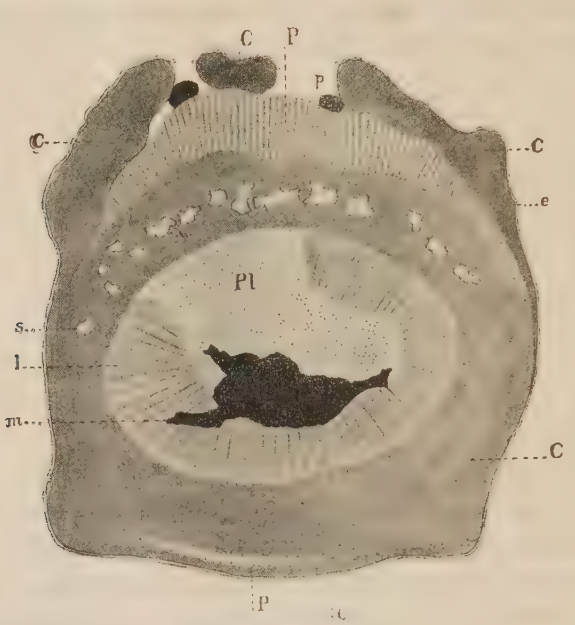


Fig. 3.

riamente sono delle iperplasie del parenchima corticale e dei tessuti fibro-vascolari e che mi riserbo di descrivere in altro lavoro. In questa breve Nota era mio scopo soprattutto di far notare i rapporti che sussistono fra questo insetto e gli effetti dei geli invernali e di quelli tardivi i quali non solo preparano una superficie adatta alla fissazione della *Pollinia* ma modificano in tal modo l'attività fisiologica della pianta chè il grado di ricettività per questo insetto viene notevolmente aumentato. È certamente in relazione a questi fatti che gli attacchi della *Pollinia* sono assai frequenti negli oliveti sottoposti nell'inverno e nella primavera a temperature molto basse.

III. *Di un nuovo fungo parassita degli apici radicali dell'olivo.* — In una precedente Nota (1) ho già fatto conoscere il diverso sviluppo delle

(1) *Rapporto fra micotrofia e attività funzionale nell'olivo.* (Questi Rendiconti, vol. XVII, 1908, pag. 754).

radichette erbacee che gli olivi colpiti dalla « brusca » nel leccese presentano in confronto di quelli sani. Mentre in questi ultimi le radichette autotrofiche sono in grande numero ed a rapido accrescimento, nelle piante bruscate, invece, le radichette sono in prevalenza trasforrmate in micorize, quindi appariscono brevi, ad accrescimento limitatissimo, da cui deriva l'aspetto quasi coralloide delle fini terminazioni radicali di queste piante. Esaminando queste micorize sul finire della primavera o in autunno si trovano quasi del tutto annerite, e sotto al microscopio si presentano ricoperte da un intreccio fittissimo di ife brune che invadono tutto lo strato pilifero penetrando anche nell'interno dei peli assorbenti. In tali condizioni l'assorbimento di queste radi chette è quasi del tutto impedito e si comprende come gli olivi che presentano le radici così ridotte, si trovino in uno stato deplorevole di vegetazione. Le ricerche che ho eseguito per determinare la diffusione di questo fungo a micelio bruno, hanno dimostrato che esso si sviluppa principalmente sulle radici degli olivi soggetti alla brusca o che furono bruscati per il passato, che è raro negli oliveti in buone condizioni e che non sono mai stati attaccati da malattie. Fuori della provincia di Lecce ho ritrovato questo fungo in Sardegna (sulle radici degli olivi bruscati), nel Venafrano, nella Sabina.

Le provincie meridionali sembra che offrano a questo fungo le condizioni più favorevoli per il suo sviluppo: in Toscana e nelle provincie settentrionali per ora non l'ho trovato. Le concimazioni minerali, da quanto ho potuto osservare, non hanno un'azione efficace nel liberare gli olivi da questo parassita, che predilige gli apici trasformati in micorize. È per questo che gli olivi del meridionale, generalmente più poveri di radichette autotrofiche soffrono in grado maggiore degli attacchi di questo fungo. Nella Nota citata ho già accennato in quale rapporto stia la micotrofia con l'attività funzionale nell'olivo specialmente per ciò che riguarda la malattia della brusca.

Il micelio del nuovo micromicete è quasi completamente nero (atro-fuligineo), costituito da sottili ife ondulate, settate, spesso ramificate, le quali originano dei periteci che si elevano sulla superficie della radichetta invasa. Questi corpi di fruttificazione sono completamente opachi, neri, a forma di ampolla con collo più o meno lungo, terminato da un ostiolo indistinto. Il peridio è pseudoparenchimatico. Le dimensioni oscillano fra i 100 e i 215 μ di lunghezza per 60 e 90 μ di larghezza (cfr. fig. 4). Questi periteci sono sempre provvisti, alla base, di ife radiciformi, il resto del peridio è completamente glabro. Sono fragili, e si rompono facilmente per la pressione del vetrino copriogetti, lasciando uscir fuori poche spore (10-25) nere, opache, ovoidi o leggermente limoniformi, liscie, di 15-18$\times$27-33 μ.

La loro membrana è doppia, lo strato esterno, fortemente colorato in fuligineo, costituisce una sorta d'involucro omogeneo che facilmente si rompe (fig. 4 *s*). La membrana interna è pure colorita intensamente e solo negli stadî giovanili lascia vedere il contenuto granuloso e due finti setti apicali. Le due

porzioni polari sono infatti produzioni papilliformi della membrana e le spore devono esser considerate come unicellulari. Esse sono formate entro aschi (*a*) globulari, quasi sessili, disposti irregolarmente nell'interno del peritecio. Non appena le spore si sono circondate della propria membrana, gli aschi si gelificano e scompaiono. Questo fatto rende oltremodo difficile l'accertare non solo la disposizione ma anche la presenza stessa degli aschi. Ogni asco contiene una sola spora. Per la disposizione senza ordine degli organi sporigeni, questo fungo rientra fra le *Plectascineae* (Fischer) piuttosto che fra i Pirenomiceti come per molti caratteri si sarebbe indotti a ritenere. Infatti per i caratteri del peridio soprattutto si avvicina al gen. *Ceratostoma* e tale affinità è tanto più giustificata in quanto attualmente non è ben dimostrato

Fig. 4.

che questo genere non sia una vera *plectascinea*. Il nuovo fungo ad ogni modo è ben distinto dalle specie note di *Ceratostoma* e dai generi di Aspergillacee,, che, come il *Microascus* Zukal hanno con lui una certa affinità, dal possedere gli aschi monosporici e dalle grandi dimensioni delle spore. In attesa di descrivere con maggiori dettagli la nuova aspergillacea credo opportuno riassumere i caratteri principali nella diagnosi seguente:

Cryptoascus n. gen. — *Perithecia superficialia, simplicia, fragilia, atra, carbonacea, collo plus minusve elongato instructa, glabra, basi radicata; asci globulosi, sine ordine dispositi, monospori gelatinosi, mox evanidi; sporae ovoideae, atrae, duplice tunicatae.*

Cryptoascus oligosporus n. sp. — *Peritheciis irregulariter excipuliformibus, nigris, carbonaceis, collo plerumque elongato, basi hyphis nigris instructis, μ 100-215 altis, 60-90 μ latis; peridio pseudoparenchymatico; ascis globosis, gelatinosis, hyalinis, μ 15-20⩽30-40; sporis paucis, crassis, levibus, ovoideis, tunica fuliginea opaca obvolutis, μ 15-18⩽27-33.*

Hab. *in radicibus vivis Oleae europeae — Italia centrale e meridionale.*

Patologia vegetale. — *Osservazioni sopra il rapporto fra la composizione chimica delle radici della vite e il grado di resistenza alla fillossera.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Influenza dell'anidride carbonica e dell'ossigeno sul cuore di rettili e di anfibii* (1). Nota di G. Galeotti e di E. Signorelli, presentata dal Corrisp. F. Bottazzi.

L'importanza dell'anidride carbonica, per riguardo alla funzionalità del sistema nervoso centrale e in ispecie per riguardo ai centri del respiro, è stata riconosciuta da Mosso, il quale ha formulato una teoria, cosiddetta dell'*acapnia*, per spiegare i disturbi del mal di montagna.

Bayliss e Starling hanno considerato l'anidride carbonica come un *ormone* o regolatore chimico della respirazione; e più recentemente Frédéricq, Weil, Haldane e Priestley hanno affermato che l'apnea vera è cagionata dalla presenza di CO^2 nel sangue arterioso.

L'influenza dell'anidride carbonica sui muscoli lisci fu pure studiata da varî autori. Mosso ha osservato la contrattura del muscolo retrattore del pene del cavallo, quando questo era posto in ambiente di CO^2 a pressione ordinaria o a maggiore pressione. Bottazzi dice che l'esofago di pulcino, immerso in liquido di Ringer saturo di CO^2, si contrae meno vigorosamente che quando si trova in presenza, oltre che di O^2, di una piccola quantità di CO^2; egli conclude che, nell'azione dell'anidride carbonica, bisogna distinguere quella che può dirsi azione tossica, che è la più generalmente conosciuta, da quella, che si potrebbe dire azione fisiologica e quindi utile ai tessuti viventi. Egli si domanda, se le condizioni migliori per la funzione degli organi, non siano quelle di un liquido che contenga CO^2 ad una certa tensione parziale. L'effetto tossico, che consiste nella forte depressione del tono, o nella contrattura durevole, o nell'arresto delle contrazioni ritmiche, evidentemente si ha, quando l'anidride carbonica agisce da sola e in quantità considerevole. Quando invece l'anidride carbonica è solamente aggiunta all'ossigeno e in piccola quantità, non si osserva mai arresto delle contrazioni ritmiche, il tono si abbassa solo moderatamente e si produce poi aumento nell'altezza delle contrazioni.

(1) Dall'Istituto di Patologia Generale della R. Università di Napoli.

L'influenza dell'anidride carbonica sul cuore fu studiata pure da diversi autori. Oehrwall dice che, nell'inizio dell'asfissia a cui va incontro il cuore che pulsi in una atmosfera di idrogeno, aumenta la eccitabilità. Straub, studiando la eccitabilità del cuore di rana in atmosfera di CO^2, giunge alla conclusione che la eccitabilità si accresce, ma tale resultato fu contradetto dal Gross per riguardo al cuore dei mammiferi. Questo autore dice, che la irrigazione del cuore con liquido di Ringer, contenente maggiore o minore quantità di CO^2, produce sempre sospensione delle contrazioni automatiche e ineccitabilità del miocardio.

Göthlin trovò invece che il cuore di rana, irrigato con soluzione alcalina, pulsa meno fortemente che in un'atmosfera di O^2, contenente il 7 % di CO^2. Togliendo completamente l'anidrida carbonica, l'eccitabilità del cuore diminuisce o cessa.

Bottazzi, nelle sue ricerche sull'atrio e sul seno della *emys*, dice che le contrazioni sistoliche che l'atrio e il seno eseguiscono, dopo l'azione dell'anidride carbonica, sono più gagliarde di quelle antecedenti. In alcuni casi, se l'atrio separato dal cuore non eseguiva o eseguiva rare e deboli contrazioni sistoliche, queste comparvero vigorose e sempre regolarmente ritmiche, dopo l'azione dell'anidride carbonica.

Più recentemente Henderson, studiando sperimentalmente lo shock, che si presenta in certe operazioni chirurgiche, esprime l'ipotesi, che causa di questo shock sia l'acapnia. Da molti suoi esperimenti risultò, che, per una subitanea diminuzione di CO^2 nel sangue arterioso, si affrettavano le pulsazioni cardiache, sino ad un tetano che era causa di morte.

Metodo di ricerca.

In varî modi abbiamo cercato di studiare l'azione dell'anidride carbonica sul cuore. Abbiamo sperimentato con *emys*, con rospi, con rane, tanto sul cuore isolato, quanto su questo organo lasciato in sito. Nei primi esperimenti, il cuore di *emys* o di rospo veniva fissato per l'aorta ad una cannula incurvata ad U, congiunta con un vaso situato 15-20 cm. più in alto e pieno di liquido di Ringer. Il cuore stesso era immerso in un bicchiere con liquido di Ringer, e alla punta era legato un filo, che si avvolgeva sulla puleggia di una leva scrivente. Tanto nel vaso comunicante con l'aorta, quanto nel bicchiere contenente il cuore, facevamo gorgogliare ossigeno o anidride carbonica o miscele di questi gas.

Per altri esperimenti sulla rana, abbiamo impiegato un metodo più semplice, che ci ha dato migliori risultati. La rana, smidollata e preparata alla Engelmann, era fissata sopra un sughero e questo veniva introdotto in una piccola campana di vetro, che aveva in alto un foro molto ristretto, per il quale passava il filo, che riuniva il cuore alla leva scrivente. L'apertura inferiore della campana era chiusa all'aria, perchè immersa in una vaschetta

d'acqua, attraverso la quale si faceva gorgogliare il gas, di cui volevamo studiare l'azione.

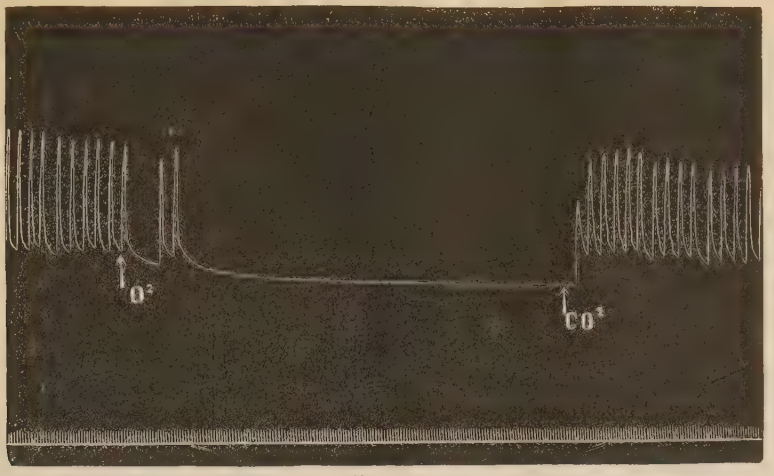


Fig. 1.

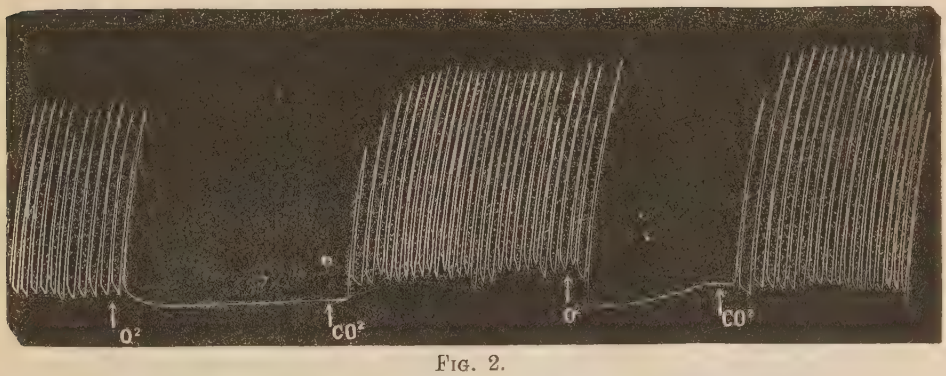


Fig. 2.

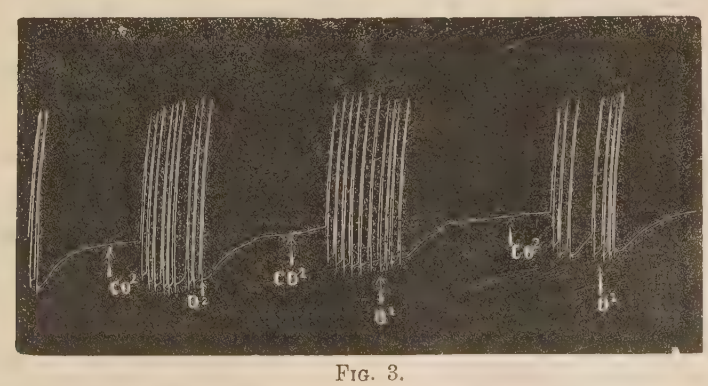


Fig. 3.

Nella tabella seguente riassumiamo i risultati di questi ultimi esperimenti e, a corredo della tabella, aggiungiamo alcuni tracciati, i quali sono di così facile interpretazione che non abbisognano di ulteriori commenti (fig. 1, 2 e 3).

TABELLA.

Numero dell'esperimento	TEMPO	GAS in contatto con il cuore	NUMERO delle pulsazioni per minuto	ALTEZZA delle contrazioni mm.	*Osservazioni*
I	3 marzo ore 15,15m	Aria	24	35	
	ore 15,30m	4 vol. di CO^2 1 vol. di O^2	22	28	
	4 marzo ore 14,20m	9 vol. di CO^2 1 vol. di O^2	18	27	
	ore 17	CO^2	14	20	Dopo alquanti minuti compare un ritmo periodico, che dura circa 5m: quindi il ritmo torna regolare.
		O^2	—	—	Il cuore si arresta appena viene a trovarsi in ambiente di ossigeno puro. La pausa dura 3m.
		CO^2	10	15	Il cuore riprende le sue pulsazioni appena ad esso giunge CO^2. Il ritmo si fa poi più frequente.
		O^2	—	—	Il cuore si arresta.
		CO^2	10	18	Ricominciano le pulsazioni.
II	9 marzo ore 15,45m	Aria	26	38	
		4 vol. di CO^2 1 vol. di O^2	20	33	
	ore 16,30m	9 vol. di CO^2 1 vol. di O^2	11	20	
	ore 17	CO^2	8	15	
		O^2	—	—	Pausa di un minuto. Poi il cuore torna a pulsare aritmicamente. Ritmo a gruppi. Lunghe pause.
		CO^2	8	20	Ritmo regolare.
		O^2	4	18	Ritmo irregolare con lunghe pause.
		CO^2	7	12	Il ritmo torna regolare.
		O^2	5	18	Dopo che al cuore è giunto l'ossigeno, si producono 5 pulsazioni e quindi il cuore si arresta.

Numero dell'esperimento	Tempo	Gas in contatto con il cuore	Numero delle pulsazioni per minuto	Altezza delle contrazioni mm.	*Osservazioni*
III	20 marzo ore 11,12m	Aria	17	34	
		CO^2	10	15	
		O^2	8	23	
		CO^2	11	15	
		O^2	7	38	
	ore 15	CO^2	14	30	
	ore 15,16m	O^2	—	—	Dopo che è cominciata la corrente di ossigeno, il cuore sèguita a pulsare irregolarmente per 90s e poi si ferma per 3m. Si sospende allora la corrente d'ossigeno e il cuore ritorna a battere.
IV	22 marzo ore 15,30m	Aria	58	35	
		CO^2	46	25	Dopo 4 minuti si presentano intermittenze e irregolarità del ritmo.
		O^2	—	—	Il cuore si arresta.
		CO^2	28	28	Il cuore ricomincia a pulsare, appena ritorna in contatto con CO^2.
V	23 marzo ore 9,50m	Aria	50	33	
		CO^2	34	10	
		O^2	24	20	
		Miscela di CO^2 e O^2	36	18	In questa miscela il cuore resta fino al giorno successivo.
	24 marzo ore 10	O^2	—	—	Il cuore si arresta.
		CO^2	21	26	Il cuore ricomincia a pulsare appena torna in contatto con CO^2.
		O^2	—	—	Il cuore si arresta.
		CO^2	21	24	Ricompaiono subito le pulsazioni.

Numero dell'esperimento	Tempo	Gas in contatto con il cuore	Numero delle pulsazioni per minuto	Altezza delle contrazioni mm.	*Osservazioni*
VI	25 marzo ore 14	Aria	36	16	
	ore 15	CO^2	20	15	
	ore 15,20^m	CO^2	17	10	
		O^2	4	10	Il cuore fa 9 pulsazioni in 2^m e poi si arresta per 2^m, 30^s.
		CO^2	9	14	Il cuore ricomincia a pulsare.
	ore 16,20^m	CO^2	7	9	Il cuore resta per 1 ora in CO^2.
		O^2	—	—	Il cuore si arresta appena si trova in ambiente di ossigeno. La pausa dura 90^s, poi ricominciano le pulsazioni e quindi di nuovo una lunga pausa.
		CO^2	8	10	Ricompare subito il ritmo.
		O^2	—	—	Il cuore si arresta per 1^m, 20^s, poi fa 18 contrazioni, quindi si arresta di nuovo.
		CO^2	8	12	Ritmo regolare.
VII	26 marzo ore 16	4 vol. di CO^2 1 vol. di O^2	18	23	Il cuore resta nella miscela di CO^2 e O^2 durante 18 ore.
	27 marzo ore 10	O^2	—	—	Contrazioni debolissime che non si possono misurare.
		CO^2	10	18	Il ritmo ritorna normale.
		O^2	—	—	Pausa di 2^m, 50^s.
		CO^2	12	16	Ricompaiono le pulsazioni.
		O^2	—	—	Pausa di 2^m, 40^s.
		CO^2	14	20	Ricompaiono le pulsazioni.
		O^2	—	—	Pausa di 3^m.
		CO^2	18	30	Ricompaiono le pulsazioni.
		O^2	—	—	Pausa di 3^m, 40^s.
VIII	30 marzo ore 15	Aria	40	45	
		CO^2	16	12	
		O^2	—	—	Una lunga pausa interrotta da una sola pulsazione.
		CO^2	18	19	Ricompare il ritmo.
		O^2	—	—	Pausa.
		CO^2	20	20	Ricompare il ritmo.

Conclusioni.

1°. Dobbiamo anzitutto notare, come il cuore degli animali inferiori risenta poco la influenza dell'anidride carbonica. I cuori di rospo e di *emys*, posti in liquido di Ringer, in cui gorgogli una miscela costituita da un volume di ossigeno con nove volumi di anidride carbonica, non mostrano notevoli cangiamenti nella loro funzionalità, e, solo dopo molto tempo, compare un rallentamento del ritmo e diminuisce l'altezza della contrazione.

2°. Nella rana smidollata, preparata alla Engelmann e mantenuta in atmosfera di CO^2, dopo parecchi minuti (15-20) comincia a rallentarsi il ritmo cardiaco, mentre si abbassano le contrazioni sistoliche. Talvolta, quando l'anidride carbonica ha agito a lungo, compare un ritmo periodico, a gruppi, ovvero si manifestano aritmie profonde e lunghe intermittenze, dopo le quali però il ritmo spontaneamente si ristabilisce.

3°. Il fenomeno più interessante che abbiamo osservato è però questo: se, dopo che la rana preparata alla Engelmann è rimasta per molto tempo in ambiente di CO^2, si sostituisce l'anidride carbonica con ossigeno puro, il cuore sovente si arresta. L'arresto talvolta è immediato, talvolta ha luogo dopo poche contrazioni, separate da pause. La sospensione dell'attività cardiaca dura spesso qualche minuto; poi si può ristabilire spontaneamente un ritmo, che ora è regolare, ora irregolare e interrotto da pause.

4°. Se al cuore, che si è fermato dopo la sostituzione dell'anidride carbonica con l'ossigeno, si fa arrivare nuovamente CO^2, il cuore sempre ricomincia a pulsare o immediatamente o dopo un breve intervallo. In generale il ritmo, ristabilitosi per la presenza di CO^2, è regolare, e le contrazioni sistoliche sono più alte di prima (vedi fig. 2). Questo ultimo fatto si può interpretare come la conseguenza di un restauro delle fibre muscolari, avvenuto durante il periodo di inattività nell'ambiente di ossigeno.

5°. Si può quindi concludere, che l'anidride carbonica è uno stimolo utile per la funzione del cuore, sia che essa (come dice Bottazzi) sopprima resistenze o azioni inibitrici, che si esercitano sovra l'organo, sia che stimoli apparecchi nervosi, governanti l'attività motoria, sia infine che influisca sul metabolismo degli elementi muscolari contrattili, in guisa che agevoli i processi catabolici nei medesimi.

6°. Dai nostri esperimenti sembra di più risultare, che non sussiste per il cuore, connesso con tutti suoi apparecchi nervosi di regolazione intrinseci ed estrinseci, un optimum di concentrazione di CO^2. Il cuore può lavorare benissimo anche in un ambiente molto ricco di CO^2, come pure la sua funzione si compie perfettamente, quando l'ossigeno sovrabbonda. Se però il cuore, abituato ad un eccesso di CO^2, viene improvvisamente a trovarsi in

un ambiente di O^2, esso subisce un disequilibrio tale, che la sua funzione talvolta si arresta, per ricominciare poi, quando la anidride carbonica ritorni in eccesso.

7°. A questo strano fenomeno dell'arresto del cuore per azione dell'ossigeno puro e del ritorno del ritmo per azione dell'anidride carbonica, si può ben dare il nome di *paradosso fisiologico*.

BIBLIOGRAFIA.

Bayliss et Starling, Ergebnisse der Physiologie, a. V, 1906, pag. 664.
Mosso, Archives italiennes de Biologie, 1903, vol. XI, pag. 19.
Fredericq, Archives de Biologie, 1901, vol. XVII, pag. 563.
Weil, Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmakologie, 1906, vol. LIV.
Haldane and Priestley, Journal of Physiology, 1905, vol. XXXII, pag. 225.
Bottazzi, Zeitschrift für allgemeine Physiologie, 1909, vol. IX, pag. 368.
Oehrwall, Skandinavisches Archiv für Physiologie, 1898, vol. VIII.
Straub, Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmakologie, 1901, vol. XLV, pag. 380.
Gross, Pflüger's Archiv, 1903, vol. XCIX, pag. 264.
Göthlin, Skandinavisches Archiv für Physiologie, 1901, vol. VII, pag. 1.
Bottazzi, Zeitschrift für allgemeine Physiologie, 1906, vol. VI, pag. 168.
Henderson, American Journal of Physiology, 1908, vol. XXI, pag. 126; 1909, vol. XXIII pag. 345.

Zoologia. — *Intorno al Rhizoglyphus echinopus* (Fum. e Rob.) Moniez, *e ad un altro acaro vivente con esso sulle radici di viti*. Nota preliminare della dott. Anna Foà, presentata dal Socio B. Grassi [1].

Lo studio dei deperimenti delle viti ed in particolar modo di quelli prodotti dalla fillossera, ha indotto molti autori ad occuparsi anche dell'azione esercitata da un acaro che si trova anch'esso frequentemente sulle radici malate, e che i più tendono a identificare col *Rhizoglyphus echinopus* (Fumouze e Robin) Moniez [2]. Disgraziatamente, i risultati a cui giungono i varî studiosi sono in pieno contrasto tra loro; e mentre da alcuni l'animale è ritenuto saprofita, quindi non dannoso, per altri, in speciali condizioni, diviene un vero e proprio parassita, nocevolissimo alle piante, ed altri infine è d'avviso ch'esso rechi danno, in quanto che facilita l'azione deleteria di altri parassiti: per esempio, della fillossera. Si aggiunga che le varie descrizioni e figure, per essere o imperfette o troppo generiche, o in qualche particolare errate, impediscono di accertarsi se si tratti o no di un'unica

[1] R. Osservatorio antifillosserico di Fauglia (Pisa), diretto dal prof. B. Grassi.
[2] Recentemente (1906) il Banks denomina la specie *Rhyzoglyphus hyacinthi* Boisd.

forma e fanno nascere il dubbio che il disaccordo possa attribuirsi all'esser stato adoprato, per le varie osservazioni, un materiale differente (1).

Siccome nello studio della fillossera ho dovuto continuamente imbattermi nell'acaro in discorso, che a Fauglia è comunissimo, ho preso ad occuparmi dell'argomento colla speranza di portare un po' di luce nella dibattuta questione, e per prima cosa mi sono posta la domanda: si tratta o no del *Rhizoglyphus echinopus*?

Per avere una risposta sicura, il mezzo più diretto era di ricercare il *Rh. echinopus* in qualcuno degli *habitat* in cui fu trovato dagli autori che ne hanno dato le più particolareggiate descrizioni, e paragonarlo con la forma che trovavo sulle viti. Infatti ho preso in esame patate e cipolle marcite (il materiale adoprato da Canestrini) e non ho avuto nessuna difficoltà a raccogliere il *Rh. echinopus* in tutte le sue forme, cioè individui giovani, femmine adulte, maschi omeomorfi ed eteromorfi, e ninfe ipopiali. Confrontando questi acari con quelli raccolti sulle radici di viti, mi hanno colpito una quantità di differenze che mi hanno fatto a tutta prima ritenere che si trattasse di due specie distinte. Le differenze consistevano principalmente nelle dimensioni (molto maggiori nel *Rh. echinopus* delle patate e delle cipolle che non nelle forme viventi sulle radici di viti), nel numero di uova visibili nell'addome delle femmine (otto, dieci, dodici e più nel primo caso, uno o due nel secondo), nella forma del corpo (tondeggiante nel primo caso, allungata nel secondo), nella posizione del solco dorsale (molto più vicino all'estremità anteriore del corpo nel primo caso, che non nel secondo), nella lunghezza dei peli dorsali (maggiore nel *Rh. echinopus*), ecc. Se non che, quando volli determinare esattamente i caratteri basandomi sull'osservazione di moltissimi individui, ho trovato una così grande variabilità, che mi è venuto di mano in mano a mancare ogni criterio sicuro per separare le due specie. I confronti si basavano sulle femmine, perchè sulle radici di viti i maschi si trovano con difficoltà enorme, a differenza di quanto avviene pel *Rh. echinopus* sulle patate e cipolle, ove si trovano in abbondanza i maschi omeomorfi, e abbastanza facilmente anche gli eteromorfi. Ho intensificato le ricerche per trovare i maschi sulle radici di viti e con pazienza vi son riuscita, ma la questione non è stata risoluta neanche in questo modo, perchè ho trovato maschi di due differenti sorta: gli uni, salvo le dimensioni molto minori, in tutto eguali ai maschi omeomorfi del *Rh. echinopus*, gli altri molto più piccoli, col quarto paio di zampe ingrossato, diversi da tutte le forme descritte dagli autori. Nascevano quindi due ipotesi, o che sulle radici di viti vi fossero mischiate due specie diverse, o che il *Rh. echinopus* avesse tre sorta di maschi. Quest'ultima mi parve inverosimile e molto più probabile la prima. Non essendo però riuscita a distinguere con certezza

(1) Tutte le notizie bibliografiche saranno riportate nel lavoro in esteso.

due specie col solo esame microscopico, cercai di separarle colle culture, e nello stesso tempo di studiare la variabilità nel *Rh. echinopus*.

Feci per ciò le seguenti esperienze:

1°. Su pezzetti di radici di viti fillosserate, ma senza acari, tenute in camera umida in capsula di Petri, misi una decina di grosse femmine di *Rh. echinopus*, raccolte sulle cipolle. L'esperimento non fu fatto su larga scala per la difficoltà di trovare a Fauglia radici di vite marcite senz'acari e perchè serviva, più che altro, di confronto.

2°. Su patate tagliate a fette, in capsula di Petri, furono messi moltissimi frammenti di corteccia di radici di vite, gremiti di acari.

Dalla prima esperienza è risultato che il *Rh. echinopus* può vivere anche sulle radici di vite marcia, ma vi si trova evidentemente male, perchè si riproduce poco e diminuisce notevolmente di dimensioni. Le madri messe nella capsula il 10 luglio 1909 erano lunghe più di un millimetro, tondeggianti e contenevano un numero grande di uova; dopo più di un mese invece di queste grosse madri ve ne erano altre lunghe solo 800 μ con minor numero di uova; dopo un altro mese circa vi erano altre madri lunghe solo 440 μ, contenenti un solo uovo: la parte posteriore del corpo appariva perciò più ristretta e l'animale, in complesso, più allungato che tondeggiante. Queste madri erano in tutto eguali a parecchie altre raccolte sulle radici di viti.

Si potrebbe obiettare che i frammenti di radici di viti che servirono per l'esperimento, non essendo stati sterilizzati, potessero già contenere le forme piccole; ma ciò si può escludere, oltre che per l'esame accuratissimo fatto, per aver seguìto passo passo la trasformazione progressiva.

Dalla seconda serie di esperienze è risultato che gli acari delle radici di viti possono vivere sulle patate, che a poco a poco vengono invase dal marciume. In questo ambiente vengono a differenziarsi presto due specie, perchè si vedono alcune forme che s'ingrossano notevolmente, si rigonfiano, si arrotondano, mentre altre rimangono più piccole, più appiattite, più allungate. Separando le une dalle altre, trasportandole su altre fette di patate, si finisce in breve per avere isolate le due sorta. A facilitare l'esperienza contribuisce il fatto che questi acari possono vivere qualche tempo sulle patate tagliate, anche sane, nutrendosi dello straterello superficiale; così prendendo patate sane, lavate accuratamente, si può esser sicuri di avere un materiale di coltura non inquinato.

La specie che ingrossa si riconosce facilmente come *Rh. echinopus*. Siccome nelle capsule non acquista mai le dimensioni massime, per maggior sicurezza ho portato le fette di patate marcite cogli acari in un grosso vaso di vetro, in cui ho messo patate intere e altre spaccate per metà. Questo vaso ben chiuso, involtato nella carta, fu sempre tenuto lontano dal luogo ove lavoravo, perchè non vi entrasse materiale estraneo. Dopo due mesi i

Rh. echinopus erano diventati grossissimi, e vi erano numerosi maschi omeomorfi ed eteromorfi.

Nelle altre capsule, le forme piccole sono cresciute un poco, ma sono rimaste sempre di dimensioni molto inferiori a quelle massime del *Rh. echinopus*, il numero delle uova è aumentato e giunto in un caso fino a sei, ma non l'ha mai superato. I maschi si mantennero sempre scarsissimi; i pochi raccolti (sei o sette su molte centinaia di femmine) erano tutti piccolissimi, col quarto paio di zampe ingrossato, identici ad alcuni di quelli trovati sulle radici di viti. Una parte di questi acari, messi in vaso con patate nelle stesse condizioni delle prime culture, rimasero invariati.

Risulta dunque dimostrato che sulle radici di viti fillosserate, oltre ad altre forme che qui, per la loro scarsezza, non meritano di esser prese in considerazione, esistono due sorta di acari; uno è il *Rh. echinopus*, ridotto però molto piccolo e quindi di aspetto un po' diverso da quello che ha di solito sulle patate e cipolle marcie, l'altro è una specie di cui le femmine somigliano moltissimo a quelle del *Rh. echinopus*, salvo alcune piccole differenze che ora passo a precisare, mentre i maschi sono completamente diversi da quelli del genere *Rhizoglyphus*. Ritengo perciò che debba ascriversi ad un nuovo genere che denominerò *Heteroglyphus* [1]; dirò la specie *Heteroglyphus vitium* per indicare che fu trovata a preferenza sulle viti, per quanto l'abbia rinvenuta una volta anche in una radice malata di olivo, e un'altra su una radice fillosserata di quercia.

Le variazioni che subisce il *Rh. echinopus*, passando da un ambiente favorevole ad uno sfavorevole, sono le seguenti: scompaiono i maschi eteromorfi e restano solo gli omeomorfi, i quali divengono enormemente piccoli; nelle femmine, che pure impiccoliscono moltissimo, il corpo, che era arrotondato, diventa più ristretto in rapporto colla riduzione del numero delle uova, e molto più piccolo specialmente nella parte posteriore; quindi il solco che separa la parte anteriore dalla posteriore del corpo, relativamente viene a trovarsi più all'indietro. Il margine anteriore del corpo appare più largo, le zampe sono più deboli, i peli dorsali più corti; quindi nessuna distinzione di specie, basata su qualcuno di questi caratteri, può avere valore assoluto.

Le femmine di *Heteroglyphus vitium* sono in complesso molto più piccole di quelle del *Rh. echinopus*, ma le maggiori delle prime possono superare le più piccole delle seconde, hanno un numero di uova variabile da uno a sei, quindi anche per questo carattere possono confondersi con quelle del *Rh. echinopus*, ove il numero delle uova varia da uno a dodici e più. La parte anteriore del corpo, relativamente alla posteriore, in complesso è più grande che nel *Rh. echinopus*, ma, come ho detto, questo carattere è

[1] Il nome mi è stato suggerito dal prof. Berlese, il quale ha avuto la cortesia, di cui vivamente lo ringrazio, di vedere i miei preparati e di aiutarmi a raccogliere la letteratura in proposito.

variabile. Differenze piccole e difficili a precisarsi, ma costanti, sono invece le seguenti: nel *Rh. echinopus* il quarto paio di zampe si mantiene sempre un pochino più lungo del terzo, mentre nell' *Heteroglyphus vitium* è eguale al terzo; nel *Rh. echinopus* dal lato dorsale, posteriormente al solco, esistono altri peli oltre a quelli marginali, e questi ultimi sono lunghi; invece nell' *Het. vitium* non vi sono peli dorsali se non all'estremità posteriore del corpo, e i marginali sono corti, salvo due dell'estremità posteriore del corpo che possono essere un po' più lunghi, ma sempre più brevi che nel *Rh. echinopus.*

I maschi di *Het. vitium* si distinguono immediatamente per avere il quarto paio di zampe ingrossato, con robuste spine e con un forte sperone. La descrizione sarà fatta minutamente nel lavoro esteso, perchè qui, senza figure, riuscirebbe oscura.

La grande scarsezza di maschi mi ha fatto supporre che l' *Het. vitium* fosse partenogenetico, ed ho cercato di dimostrarlo. Ho messo in capsula di Petri, tra due fette di patata sana, cinque giovani larve che per le loro dimensioni relativamente considerevoli giudicai essere di femmine; queste larve si sono sviluppate e col tempo hanno dato luogo ad una numerosa colonia, ove non ho mai visto un maschio. Il tempo necessario per una generazione, in estate, a Fauglia, era di circa un mese.

Non ho ancora fatto ricerche sulla partenogenesi del *Rh. echinopus*; forse però in questa specie, dove i maschi sono molto comuni, il fenomeno non si verifica.

Resta ora la questione principale per cui ho intrapreso queste ricerche preliminari; determinare, cioè, se questi acari siano o no dannosi alle radici di viti. I dati che ho finora a questo riguardo sono incompleti e debbono essere integrati con ricerche sperimentali; quindi mi limito a riferire i punti che ho potuto stabilire.

Entrambe le specie, sulle patate e sulle radici di viti, non intaccano i tessuti sani; non ho ancora fatto esperimenti sui bulbi di alcune gigliacee, in cui, secondo alcuni autori, il *Rh. echinopus* si comporta come parassita.

Il *Rh. echinopus* preferisce un marciume umido ed ha bisogno di nutrimento abbondante; l' *Het. vitium* preferisce un marciume non molto umido; se l'umidità è eccessiva, si producono una quantità di ninfe ipopiali che emigrano.

Sulle viti ho trovato entrambi questi acari soltanto in quelle radici in cui il processo di disorganizzazione dei tessuti era già molto avanzato ed esteso, non li ho mai trovati sulle tuberosità isolate, non ancora marcite, o in cui il marciume era appena iniziato. In mezzo al materiale morto, gli acari delle due specie si inoltrano per deporre le uova e scavano gallerie,

ma il caso di trovare queste gallerie occupate dalla fillossera si può dire eccezionale e si verifica solo quando le fillossere sulla vite sono state o sono numerosissime; secondo me, si tratta di pochi individui rimasti per caso poco lontani dal punto in cui si sono sviluppati, ma di regola le neonate di fillossera vanno a fissarsi dove la vite è in condizioni migliori: dove l'acaro è molto abbondante, la fillossera è già partita.

In un solo caso la fillossera si trova regolarmente fissata più profondamente dell'acaro; ciò avviene sulle radici molto grosse in cui il ritidoma si distacca a lunghe striscie, quivi la fillossera è fissata sulla radice al disotto della scorza, mentre gli acari vivono sulla scorza dei detriti dei tessuti che si distruggono. Però, anche quando mancano gli acari, la fillossera su queste grosse radici non può essere e non è superficiale, perchè non può trovare nutrimento nel ritidoma; in tutti gli altri casi, salvo eccezioni, a mio avviso trascurabili, la fillossera è alla superficie delle radici.

Per queste osservazioni io non ritengo dimostrato che l'azione dell'acaro influisca nell'aumentare il danno prodotto dalla fillossera, e in questa opinione mi conforta lo studio dell'andamento dell'infezione fillosserica intorno all'osservatorio di Fauglia. Quivi gli acari sulle radici malate sono sempre stati numerosi. Eppure il progresso dell'infezione può dirsi lento; infatti una vigna di pochi filari (forse una ventina), già fortemente invasa da fillossera nel 1905, tanto che alcune viti erano già morte, ancora oggi non è completamente distrutta.

Zoologia. — *Sulle spermatogonie della Tryxalis* [1]. Nota preliminare del dott. G. Brunelli, presentata dal Socio B. Grassi.

Proseguendo le mie ricerche sulla spermatogenesi degli Ortotteri, dopo aver scartato diverse specie che non si prestavano allo studio di diverse quistioni sulle quali ho rivolto la mia attenzione, mi sono fermato sullo studio degli elementi germinali della *Tryxalis*.

Un primo risultato del quale qui espongo una breve notizia, riguarda il modo di comportarsi del monosoma (cromosoma accessorio) nelle spermatogonie.

Sutton nella sua Memoria ormai nota su *Brachystola*, ha illustrato uno speciale comportamento del monosoma nelle spermatogonie seconde. In quello che Sutton designa come nucleo a sacculazioni (*sacculated nucleus*) di dette spermatogonie, il monosoma si presenta perifericamente come un *cromosoma vescicoloso* nel quale la cromatina è distribuita alla periferia della membrana del cariomero che esso costituisce.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

Questo reperto di Sutton è stato molto discusso dai citologi e accanto alle figure del nucleo nei blastomeri di *Ascaris*, costituisce, anche a giudizio di Boveri, uno degli argomenti più favorevoli alla dottrina della individualità dei cromosomi (1).

Il comportamento da me riscontrato in *Tryxalis* in modo ancora più appariscente mostra l'autonomia del monosoma, ed esso è nell'istesso tempo in certo senso opposto a quello descritto da Sutton in *Brachystola*, perchè in *Tryxalis* non solo il monosoma presenta una resistenza alla disgregazione telofasica, fin dalle prime divisioni delle spermatogonie seconde (2), ma inoltre è situato in una insolcatura del nucleo. Mentre così in molti casi si scorge una distribuzione più o meno diffusa della rimanente cromatina, il monosoma si mostra più o meno compatto occupando il lume centrale del vacuolo che gli corrisponde e ciò è reso più interessante dalla condizione già accennata della sua situazione profonda.

Per tale condizione di cose il monosoma potrebbe essere scambiato, specialmente in sezione trasversale, per un nucleolo cromatinico; ciò potrebbe avvenire specialmente non possedendo la seriazione degli stadi o preparazioni non perfettamente riuscite, si spiegherebbe così come talvolta in elementi pur di notevole grandezza, non sia stato identificato il monosoma nello stadio di riposo delle spermatogonie. Come un tale comportamento in *Tryxalis* data la grandezza degli elementi (in certi stadi il monosoma in sezione mostra di occupare tutto il diametro del nucleo!) offra un interessante materiale per le quistioni relative alla individualità dei cromosomi, io credo che sarà da me dimostrato ad evidenza colle figure che accompagneranno il lavoro esteso di prossima pubblicazione (3).

E ancora debbo aggiungere una osservazione: non solo le spermatogonie offrono notevoli immagini che indicano chiaramente il persistere di determinati territori da cui si riedificano i cromosomi, ma anche nelle cellule somatiche si mostra spesso con notevole evidenza il persistere delle strutture cromosomiche, ciò che sarà oggetto di miei ulteriori studi, come anche la maturazione e la fecondazione di tale interessante Ortottero.

(1) Si veda in proposito anche la mia Memoria: *La spermatogenesi del Gryllus desertus* Pall. (R. Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, Memorie, vol. VII, serie 5ª, 1909).

(2) Le figure di quegli autori che hanno descritto un monosoma più o meno compatto nello stadio di riposo, sono da riportarsi alle ultime divisioni delle spermatogonie seconde.

(3) Io mi riserbo allora di discutere gli interessanti lavori di Reuter, Della Valle, Noè e di altri relativamente alla individualità dei cromosomi.

Microbiologia. — *Ulteriori osservazioni sulla struttura del Neuroryctes hydrophobiae* Calkins [1]. Nota del dott. A. Negri, presentata dal Socio B. Grassi.

Nella comunicazione che ha avuto l'onore di essere accolta tra le Memorie di questa Accademia [2], io ho illustrato fin dal principio dell'anno in corso una serie di interessanti reperti sulla struttura del parassita della rabbia che stanno a dimostrare l'esattezza di quanto già da alcuni anni ho affermato: « che nell'interno dei « corpi specifici » della rabbia esistono delle parti nucleari; che questi corpi inoltre presentano delle intime modificazioni che si svolgono con leggi costanti, tali da non poter essere interpretate che l'espressione del ciclo di un essere vivente, di un protozoo ».

Più precisamente, nella mia ultima Memoria, io ho dimostrato — riassumo in breve le conclusioni — che, colorando nei preparati per strisciamento il *Neuroryctes hydrophobiae* con il metodo del Romanowsky, la massa fondamentale del parassita si colora in azzurro, le cosidette « formazioni interne » assumono una tinta rosea.

In queste ultime, con tale metodo, si possono distinguere due sostanze: una, in apparenza omogenea, che dà la forma e le dimensioni, l'aspetto d'insieme, delle singole « formazioni interne » e che, come ho detto, si colora debolmente in roseo. In ogni formazione interna vi è poi un'altra sostanza, sotto forma di granuli e di blocchetti, che di fronte al metodo del Romanowsky si comporta come la cromatina dei protozoi, differenziandosi in rosso violaceo intenso.

I blocchetti di cromatina, come ho reso noto, mostrano dei processi di divisione, sebbene, data la piccolezza estrema delle immagini, non se ne possano determinare con esattezza i particolari.

In seguito a ripetute divisioni la cromatina si riduce a granuli finissimi di grandezza uniforme, che, ad un determinato stadio, sono distribuiti regolarmente in tutto il corpo del parassita.

A questo stadio un altro ne segue in cui il protoplasma si dispone in aloni, che a mano a mano si differenziano in modo sempre più netto, attorno ad ogni granulo di cromatina. Il protozoo viene in tal modo ad essere costituito da un grande numero di piccoli corpicciuoli, tutti della medesima gran-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia generale della R. Università di Pavia.

(2) Sulla morfologia e sul ciclo del parassita della rabbia (*Neuroryctes hydrophobiae* Calkins). Memorie della Reale Accademia dei Lincei. (Anno CCCVI-1909).

dezza, stipati tra loro; è però ancora una formazione compatta, a contorni netti, rigidi, regolari.

Queste caratteristiche vanno scomparendo in stadi più inoltrati; i contorni del parassita divengono meno netti, irregolari e talvolta si osserva che da un punto o punti diversi della periferia del *Neuroryctes* si ha come la fuoruscita di parte dei corpicciuoli in cui il parassita si è in totalità trasformato.

Ogni corpicciuolo (spora) risulta di un granulo di cromatina circondato da una capsula protoplasmatica, chiara, compatta, difficilmente colorabile.

Ci si trova di fronte ad una vera sporulazione, ad un processo di conitomia, in seguito al quale, secondo le leggi note per tanti altri protozoi, vengono a formarsi degli elementi figli, che presentano le parti costitutive di ogni organismo unicellulare, *protoplasma* e *nucleo*, e che riproducono la struttura originaria dell'organismo dal quale derivano.

Di fatti i parassiti più giovani che si riconoscono nelle cellule nervose, e che pure sono assai piccoli, risultano da un unico ammasso nucleare circondato da un alone di protoplasma.

***

Ritornando sull'argomento, io desidero soffermare l'attenzione su di una nuova serie di reperti, i quali confermano sempre più che la sostanza che costituisce i granuli e i blocchetti che nelle « formazioni interne » assumono con il metodo del Romanowsky la colorazione della cromatina dei protozoi, è realmente da considerarsi come cromatina.

Invero la proprietà di differenziarsi in modo elettivo con detto metodo, i caratteri dei piccoli ammassi e dei granuli cromatici, il loro modo di comportarsi, erano argomenti di indiscutibile valore a sostegno dell'interpretazione già da me avanzata. Di conseguenza, nella mia ultima Memoria, non entrai in particolari, ma, sebbene avessi già eseguite in grande parte le ricerche che ora espongo, mi sono limitato ad accennare che granuli e blocchetti presentano tutti i caratteri della cromatina (pag. 18). Ripetute e completate in questi ultimi mesi le osservazioni, mi sembra ora conveniente renderne noti i risultati in modo un po' particolareggiato.

All'intento di determinare con esattezza sempre maggiore la natura di quei granuli e blocchetti che si dimostrano nel *Neuroryctes hydrophobiae* col procedimento del Romanowsky e che ho già interpretato come cromatina, io ho fatto agire su di essi quei reagenti che sono riconosciuti come i più adatti per differenziare questa sostanza nucleare.

Ho eseguito di preferenza le osservazioni su parassiti in preparati per strisciamento, a fresco, ovvero dopo breve fissazione nell'alcool assoluto.

Devo premettere che non è uno studio agevole, perchè occorre anzitutto un materiale bene adatto, che contenga cioè abbondanti parassiti e bene svi-

luppati, e perchè è necessaria inoltre una sicurezza nell'identificarli, che non si acquista che con lungo esercizio; il preparato per strisciamento difatti deve essere esaminato, alla ricerca di un punto opportuno, senza il sussidio di alcuna colorazione, nella sola soluzione fisiologica.

Per attenermi alle modalità da me seguite, ricorderò che, trovata una forma indiscutibilmente parassitaria (ho ricorso a strisci di sostanza grigia del corno di Ammone di vacche e cani infettati sperimentalmente e di qualche cane rabbioso vagante), fissavo il preparato e poscia, determinando un'aspirazione da un lato, facevo scorrere sotto il vetrino coprioggetti il reattivo, di cui volevo studiare l'azione, prolungando l'esame per tutto il periodo di tempo necessario; che fu talvolta di diverse ore.

Con questa tecnica, ho seguito il modo di comportarsi del *Neuroryctes* di fronte alle soluzioni acide, alle soluzioni alcaline, sottoponendolo alle digestioni artificiali. Alcune di queste prove io aveva già eseguito alcuni anni or sono, richiedevano tuttavia di essere studiate in modo più accurato.

Con le soluzioni deboli di acido cloridrico (ad es. al 0,3 %) i parassiti si rigonfiano, il protoplasma diviene trasparente, si fanno evidenti le formazioni interne e in queste si vedono apparire assai netti dei granuli rifrangenti che per la loro sede, la loro forma, le loro dimensioni, corrispondono senza alcun dubbio ai granuli cromatici che si differenziano in rosso violaceo con la miscela del Giemsa ovvero del Laveran.

Se si prolunga l'azione dell'acido, i granuli non si modificano, anzi talvolta divengono ancora più evidenti; resistono anche se si porta la concentrazione dell'acido cloridrico all'1 : 100.

Quando invece a queste soluzioni deboli, nei preparati in cui i granuli delle « formazioni interne » sono stati bene messi in evidenza, si sostituisce una soluzione di acido cloridrico assai più concentrata (ad es. acido cloridrico p. 4, acqua p. 3), avvenuta la sostituzione, si assiste ad un rapido impallidirsi dei granuli, che in breve si dissolvono sottraendosi all'osservazione.

Di fronte alle soluzioni di acido acetico le parti costitutive del parassita mostrano un comportamento presso a poco identico.

Dalle soluzioni alcaline — ho adoperato l'idrato di soda dall'1 al 5 per 100 — come è già noto, i parassiti sono distrutti rapidamente e in modo completo.

L'azione degli alcali sui granuli cromatici si può seguire con maggiore precisione in quei preparati nei quali tali granuli sono stati posti in evidenza da una soluzione acida. Sostituendo a quest'ultima la soluzione alcalina — determinando una corrente sotto il vetrino coprioggetti — dopo un certo tempo, senza dubbio quando l'alcali ha sostituito completamente la soluzione acida, si può accertare che i granuli si disciolgono e scompaiono.

Per le prove di digestione artificiale mi sono servito della Pepsin-Glycerin del Grübler, e della Tripsina (Trypsinum siccum) della stessa ditta. La prima in diluizioni dall'1 al 4 per 100, in soluzione di acido cloridrico al 0.2 per 100; la tripsina in soluzione debolmente alcalina (Tripsinum siccum gr. 0.1 su cmc. 30 di soluzione di carbonato di soda al 0.3 per 100).

Senza entrare in particolari, mi limito a ricordare che nella soluzione di pepsina il corpo del parassita viene in breve digerito; i granuli cromatici invece si fanno evidentissimi e resistono a lungo, anche quando il rimanente del corpo del *Neuroryctes* è del tutto distrutto.

Nella tripsina i granuli in un primo tempo appariscono, sebbene indistintamente, però a mano a mano che la digestione progredisce divengono sempre più sbiaditi e poi si dissolvono.

***

Riassumendo: i granuli, i blocchetti che nel *Neuroryctes hydrophobiae* si differenziano con il metodo del Romanowsky ed hanno i caratteri morfologici ed il comportamento della cromatina, danno anche le altre reazioni caratteristiche di tale sostanza nucleare: resistono agli acidi fino ad una certa concentrazione al di là della quale sono distrutti; si disciolgono nelle soluzioni alcaline anche deboli; resistono alla pepsina, vengono invece digeriti dalla tripsina.

Sebbene difficili da eseguire, data la natura dell'oggetto di studio, queste reazioni — per le quali, ripeto, occorre materiale fresco ovvero fissato brevemente in alcool — sono della massima chiarezza.

Io ne ho eseguite anche altre, che pure sono date come specifiche della cromatina, ma su di esse non mi soffermo, sia perchè di alcune il valore è discusso, sia perchè, data la peculiare struttura e le piccole dimensioni del parassita, alcune non le ho potute osservare con quella nettezza che avrei desiderato.

Faccio però notare che le reazioni che ho ora riferito sono le più importanti, tali da autorizzare, insieme cogli argomenti noti, la conclusione che la sostanza in esame è indubbiamente « cromatina », come già io l'aveva interpretata.

Da questa nuova serie di dati di fatto, a me sembra risulti una ulteriore dimostrazione della natura parassitaria dei « corpi della rabbia »; natura parassitaria che ha avuto in questi ultimi tempi autorevolissime conferme.

Non ho creduto superfluo rendere noti questi fatti nella speranza di poter presto addurre ancora altre prove che valgano a dimostrare ancor più luminosamente che la questione della natura dei « corpi specifici » della rabbia è oramai risolta in modo definitivo.

Petrografia. — *Ricerche petrografiche e chimiche sulle formazioni granitiche di Gavorrano* (1). Nota di Alessandro Martelli, presentata dal Socio C. De Stefani.

I graniti di Gavorrano ebbero un primo sommario illustratore nel Santi (2), che in essi credette distinguere più varietà a seconda dell'aspetto esteriore. Savi e Meneghini (3) a proposito delle formazioni granitiche della Maremma e dell'Arcipelago toscano, scrivono che nel dicco di Gavorrano il granito tormalinifero passa gradatamente ad un porfido euritico.

Il vom Rath (4) descrive le formazioni granitiche in parola distinguendovi come prevalente un granito normale porfiroide per grossi elementi feldispatici, analogo a quelli dell'Elba, e una varietà tormalinifera minuta, che a guisa di grandioso filone di 65 m. di potenza sarebbe, con direzione est-ovest, incassata quasi verticalmente nell'altro. Fra questa varietà e il granito incassante il passaggio sarebbe graduale, ma nondimeno il vom Rath ritiene che anche a Gavorrano, come nelle analoghe formazioni dell'Elba, si abbia un granito più antico attraversato da uno più recente tormalinifero.

Il Lotti (5) riferisce come il granito costituisca una zona di circa 3 kmq. a oriente e settentrione del paese, e si prolunghi per oltre due chilometri a sud fin presso al villaggio di Ravi, insinuandosi in forma di filone fra i calcari, con uno sviluppo massimo da est a ovest di un centinaio di metri e grado grado decrescente verso Ravi. Il Lotti osserva poi che anche nel granito normale si hanno tormaline e che non si distinguono i limiti fra il granito minuto tormalinifero e quello normale porfiroide; ed escludendo infine che si possa trattare di diverse e non contemporanee formazioni, ritiene che per giustificare l'esistenza di un filone granitico dentro il normale, occorrerebbe ammettere che la seconda eruzione avesse interessato solo la massa granitica preesistente, risparmiando i terreni sedimentari circostanti.

Accenni petrografici a queste rocce con le stesse distinzioni del vom Rath, vennero fatti pure dal Traverso (6), ma uno studio più minuzioso fu

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto Superiore di Firenze. Al chiar.mo prof. F. Millosevich, che in questo e in altri lavori chimici petrografici mi ha cortesemente aiutato con i suoi validi consigli, esprimo i più vivi ringraziamenti. A. M.

(2) Santi G., *Viaggio terzo in Toscana*. Pisa, 1806.

(3) Savi P. e Meneghini G., *Geologia della Toscana*. Firenze, 1851.

(4) Rath vom G., *Geognostisch-mineralogische Fragmente aus Italien*. IV. Zeitschr. deutc. geolog. Gesell. Berlin, 1873.

(5) Lotti B., *Sulla geologia del gruppo di Gavorrano*. Boll. R. Com. geol. it. vol. VIII. Roma, 1877. — *Sui depositi ferriferi dell'Elba e della regione littoranea tosco-romana*. Rass. miner. XIV. Torino, 1901.

(6) Traverso S., *Sulle rocce della Val di Trebbia (con appendice sui graniti recenti)*. Soc. Lig. di Sc. Nat. Vol. VII, Genova, 1896.

compiuto dal Marocchi (1), che distinse e descrisse un granito porfirico, un microgranito tormalinifero e un microgranito micaceo. Nello stesso lavoro, il Marocchi riassume pure brevemente la nota quistione sull'età controversa dei graniti toscani, affermata terziaria da molti (Savi, Pilla e Coquand, Collegno, Pareto, Meneghini, vom Rath, Cocchi, Dalmer, Lotti) e in parte pure corrispondente a quella dei terreni cristallini e paleozoici della Sardegna da altri (De Stefani, Bucca).

I rilievi da me fatti sul posto, m'inducono a riconoscere la giustezza delle osservazioni del Lotti (2) per quanto riguarda la disposizione dicchiforme del granito in rocce mesozoiche ed eoceniche alterate dal contatto, ma mi scosto dal benemerito studioso della geologia toscana nell'affermare, col vom Rath, che il granito tormalinifero forma nella massa del cosidetto granito normale, che più avanti distinguo come granitite porfiroide, un filone mal limitato, è vero, da quello incassante al quale però non fa passaggio graduale, ma chiaramente individualizzato, diretto da est a ovest con una settantina di metri di potenza, con nette apofisi filoniane nella stessa granitite incassante e con intrusioni bene sviluppate anche dentro il calcare a sud-ovest di Gavorrano. Debbo questa nuova e interessante constatazione alla cortesia del Direttore delle note miniere di pirite, il quale mi ha permesso di seguire e di osservare in sua compagnia in un nuovo braccio di galleria lungo l'irregolare contatto mineralizzato fra la formazione granitica e quella calcarea, l'intrusione due volte ripetuta — a m. 460 e a m. 500 dall'ingresso della galleria bassa a sud di Gavorrano — del granito minuto tormalinifero nei calcari, con scisti associati, ritenuti retici dal Lotti, e come tali segnati nella carta geologica d'Italia. Queste intrusioni hanno una potenza di oltre 6-7 m. e si protendono verso nord-ovest per un tratto non ancora determinato e certo maggiore ai 25 m. perchè proprio a tale distanza dal consueto contatto sono attraversate dalla nuova galleria avanzata nella massa sedimentaria.

Non potrebbe più dunque contestarsi la natura filoniana di questo granito minuto, che anche per la sua struttura si accosta ai tipi aplitici filoniani e che — come vedremo — risulta anche chimicamente e quindi magmaticamente ben differenziato dalla granitite. Per la formazione granitica di Gavorrano si dovrebbe quindi ammettere l'esistenza di due successive ed immediate emissioni; la prima granititica più sviluppata e potente in forma di grandioso dicco con una superficie d'affioramento di oltre 3 kmq., e la seconda di tipo aplitico in forma di filone potente 60-70 m. e affiorante da est a ovest a cento metri in linea retta dal paese verso Ravi, con apofisi filoniane strette fino a un minimo di m. 0,05 nella stessa granitite incassante e più

(1) Marocchi E., *Studio sul granito di Gavorrano*. Mem. Soc. Tosc. di Sc. Nat. vol. XV. Pisa, 1897.

(2) Lotti B., *Sull'età e origine dei graniti toscani*. Boll. R. Com. geol. it., vol. XV, 1884. — *Descrizione geologica dell'isola dell'Elba*. Mem. R. Com. geol. it. Roma, 1886.

sviluppate, fino a un massimo constatato di m. 6-7, nei surricordati calcari. Se poi per il non marcato distacco fra le due forme rocciose, si volessero ancora escludere le due distinte emissioni, bisognerebbe per lo meno riconoscere che l'attività pneumatolitica nel consolidamento della granitite si sia esplicata in modo da determinare una particolare struttura e composizione, e una maggior ricchezza di minerali come la tormalina, solo in quella parte che ha conseguito l'aspetto filoniano.

Nei calcari e scisti a contatto si hanno abbondantissime produzioni metamorfiche microlitiche, di clorite, mica, tormalina, granato, epidoto, andalusite e minerali di ferro.

La clorite è prevalente e anche nei materiali di frizione fa parte della massa cloritosa, formatasi pure a spese degli scisti a contatto dei graniti e d'apparenza steatitosa, entro cui sono specialmente disseminati cristalli di pirite e sviluppate le concentrazioni del minerale coltivato tanto a sud-ovest di Gavorrano quanto a nord-est di Ravi.

I cristalli di *pirite* di Gavorrano non vennero ancora descritti. Sono altrettanto belli quanto quelli della vicina Isola d'Elba raggiungono spesso dimensioni lineari di 11-15 cm. e anche superiori.

Le facce sono tutte lucentissime.

Predomina in questi cristalli la forma {100}, talvolta da sola, tal'altra con una o più delle forme {111}, π {321}, π {210}; ma la combinazione dominante e quasi caratteristica è quella di tutte e quattro dette forme.

Le facce di {100} sono quasi sempre nettamente solcate per alternanza con quelle di π {210}. Le facce di una delle forme meno frequenti, il piritoedro π {210}, sono ora striate parallelamente allo spigolo troncato dalla più vicina faccia di cubo, ora normalmente allo spigolo stesso, e non di rado ambedue i sistemi di strie sono presenti nella stessa faccia, ripetendo il carattere tipo C già osservato dal Panichi (1) sulla pirite dell'Elba.

Quando nel minerale domina il solo cubo, accade spesso di osservare due o più cristalli in posizione quasi parallela simulando l'aspetto di un solo individuo, le cui facce per altro dànno al goniometro due o più riflessi distinti.

Le forme più frequenti sono dunque:

{100} {111} π {321} π {210}

Sono talvolta presenti ma poco sviluppate:

π {421} {211} π {320}

L'ultima forma venne osservata in un solo cristallo della combinazione {100} π {321} {111} π {210} π {320}, nel quale la π {321} aveva un grande sviluppo.

(1) Panichi U., *Sulla pirite dell'Elba.* Riv. di Min. e Crist. It. vol. XXXVIII. Padova, 1909.

A conferma di quanto ho affermato, riporto le seguenti misure goniometriche:

Angoli	Valori osservati (medie)	Valori calcolati
	° ′	° ′
100 : 321	36,48	36,42
010 : 321	57,38	57,41
210 : 321	17, 5	17, 1
210 : 421	12,37	12,36
211 : 111	19,19	19,28
320 : 100	33,23	33,41

Descrivo ora brevemente le due forme petrografiche, sorvolando s[illegible] caratteri già notati da altri e insistendo sui particolari nuovi o differenti da quelli espressi in precedenza dai surricordati Autori.

Granitite porfiroide. — Roccia giallo-rosea fino a giallo bruna per alterazione e a grana media ma piuttosto grossa, nella quale, con interclusi di ortose fino a un massimo di 8 cm. di lunghezza, si distinguono macroscopici elementi quarzosi, feldispatici e micacei, distribuiti come nei tipici graniti. Concentrazioni di componenti principali e di tormalina in druse e sferoidi raggiate di cristallini anche di cm. 4-5 di lunghezza, rendono più appariscente il carattere porfiroide già impresso nella roccia dagli interclusi di ortose, senza però consentire, a causa della struttura olocristallina ipidiomorfa, visibile al microscopio, una distinzione marcata con la forma più spiccatamente normale, tanto che non mi sembra possa generalizzarsi per questa roccia la denominazione di porfirica già assegnatale dal Marocchi.

Peso specifico 2,55.

Prevalente è il feldispato potassico, ortose, in estese plaghe fratturate o in piccole liste, talvolta torbido, tal'altra invece assai trasparente, di solito in cristalli semplici e di rado geminati a Carlsbad, con estinzione retta e rifrangenza minore di *n* del balsamo (1.535). I cristalli porfiroidi si rimarcano dal resto della massa per la loro relativa freschezza e frequenza d'inclusioni microlitiche. In sezione, questo ortose apparisce spesso con i caratteri di microperthite e di micropegmatite anche in plaghe molto estese. Dà luogo a produzioni caoliniche e micacee e presenta inclusioni di biotite, magnetite, plagioclasio, tormalina, zircone e granato. A. D'Achiardi [1] ebbe occasione di avvertire una perfetta analogia cristallografica fra l'ortose del granito di Gavorrano e quello di S. Piero in Campo.

Il feldispato sodico calcico, tendente all'idiomorfismo rispetto al feldispato potassico, è pure abbondante ma molto meno dell'ortose, di cui appare inoltre più fresco sebbene più volte accompagnato da produzioni micacee. Presenta una struttura zonata, talvolta con bordi più acidi, e geminazioni secondo l'albite e meno di frequente albite-Carlsbad e albite periclino.

L'estinzione simmetrica rispetto alla traccia (010), risulta 3°-5° per taluni cristalli e parti più acide di altri.

[1] D'Achiardi A., *Mineralogia della Toscana.* Pisa, 1873.

Rispetto al balsamo si ha:

$$\alpha' \geqq n \qquad \gamma' > n$$

Rispetto al quarzo in contatti favorevoli:

$$\alpha' \lessgtr \omega \qquad \gamma' < \varepsilon \qquad\qquad \gamma' \geqq \omega \qquad \alpha' < \varepsilon$$

Siamo dunque in presenza di oligoclasio acido.

In altre sezioni geminate secondo l'albite e in talune zone interne del precedente plagioclasio, l'estinzione simmetrica sulla traccia di (010) è 8°-10° e accenna così a termini oligoclasio-andesinici, che vengono confermati dalle seguenti misure in geminati Albite-Carlsbad con massima estinzione 8°-16° e $\Delta = 5°\text{-}6°$:

+2	+5	−8	−10 ½
+9	+10	−14	−15 ½

Il quarzo è in plaghe allotriomorfe, rotto e in aggregati granulari e quando è associato micropegmatiticamente con l'ortose, fa ritenere che la sua consolidazione s'iniziasse quando quella dell'ortose non era ancora compiuta.

È ricco d'inclusioni liquide, molte delle quali percettibili solo a forte ingrandimento, e ancor più d'inclusioni cristalline microlitiche di mica bruna, bianca e cloritizzata, di feldispato polisintetico, di tormalina, zircone, epidoto, granato, apatite e granuli di magnetite e titanite. Scarse sezioni con estinzioni ondulate.

La biotite è abbondante in grosse sezioni, intensamente pleocroica:

a = giallo verdognolo pallido
b = c = bruno intenso

spesso verdastra per alterazione in clorite, e quando questa è molto sviluppata e con debole pleocroismo dal verdiccio pallido al verde oliva, vi si associa pure parallelamente. In laminette isolate dalla roccia ho accertato un angolo degli assi ottici così piccolo, da fare avvicinare molto la figura d'interferenza a quella delle sostanze uniassiche. Inclusioni solide come nel quarzo.

La muscovite, sebbene accessoria, si mostra pure come originaria, molto fresca, con debole assorbimento dei raggi paralleli alla più facile sfaldatura, vivaci colori di polarizzazione, e a grande angolo assiale.

Fra gli elementi accessori, oltre quelli già citati e inclusi nei costituenti principali della roccia, il più importante per la sua frequenza e sviluppo d'individui, è la tormalina, nera lucente per riflessione, bruna e con differente colore in margine per trasparenza, a forte dicroismo:

ω = giallo bruno scuro
ε = giallo chiarissimo quasi incolore,

e tinte di polarizzazione brune nella massa principale e verdastre ai bordi.

Delle rocce granitiche di Gavorrano mancava l'analisi chimica. I risultati da me ottenuti dall'analisi di un campione a grana uniforme di questa granitite sono i seguenti, e li riporto insieme con le riduzioni a 100 e relativi rapporti molecolari per il calcolo delle formule magmatiche secondo il Loewinson-Lessing e l'Osann:

Risultato analisi	Analisi a 100	Rapporti molecolari	Rapporti molecolari × 100	Rapporti molecolari a 100
Perdita per arrov. 0,72	—			
SiO^2 72,13	72,33	1,2096	120,55	79,83
TiO^2 0,44	0,44		0,55	0,36
Al^2O^3. 11,28	11,32	0,1110	11,10	7,35
Fe^2O^3 4,87	4,88	0,0305 0,1415	3,05	2,02
FeO. 0,51	0,51	0,0071	0,71	0,47
CaO 1,71	1,71	0,0305 0,0458	3,05	2,02
MgO 0,33	0,33	0,0082 0,1576	0,82	0,54
K^2O. 4,54	4,55	0,0484 0,1118	4,84	3,21
Na^2O 3,92	3,93	0,0634	6,34	4,20
100,45	100,00		151,01	100,00

Formula magmatica Loewinson-Lessing:
$1{,}57\ \overline{R}O\ ;\ 1{,}41\ R^2O^3\ ;\ 12{,}09\ SiO^2 = 1{,}11\ \overline{R}O\ ;\ R^2O^3\ ;\ 8{,}57\ SiO^2$
$R^2O : RO = 1 : 0{,}41\quad K^2O : Na^2O = 1 : 1{,}31\quad \alpha = 4{,}16\quad \beta = 24{,}6$

Formula magm. Osann:
$S_{79,83}\ A_{7,41}\ C_{-0,06}\ F_{5,47}$
$N_{6,2}\ a_{11,56}\ c_{0,04}\ f_{8,53}$

Granito minuto tormalinifero di tipo aplitico. — Roccia bianco giallognola a grana molto minuta, con piccoli cristalli di tormalina sparsi fittamente nella massa senza concentrazioni d'importanza. Pel suo aspetto criptocristallino talora con elementi appena macroscopici venne già descritto come microgranito. L'uniformità della roccia sembra rimaner costante in tutto il suo giacimento.

Peso specifico 2,6-2,7. Roccia dura e compatta nelle masse meno superficiali.

Al microscopio comparisce una struttura cristallina ipidiomorfa, che si scosta alquanto da quella definita dal Rosenbusch panidiomorfa granosa, perchè nel plagioclasio e nella mica si avverte una manifesta tendenza all'iodiomorfismo rispetto al quarzo e ortose allotriomorfi e solo con rari accenni ad individualizzarsi.

Non si tratta di un'aplite peculiare, per quanto presenti strettissime analogie con le apliti tipiche con tormalina descritte dal Rosenbusch e anche chimiche oltre che petrografiche con quelle già note dell'Elba, ma di un granito di tipo aplitico-filoniano, reso manifesto dalla generale uniformità della microstruttura determinata specialmente dai due minerali prevalenti, il quarzo e l'ortose, reciprocamente inclusi e talora anche micropegmatiticamente concresciuti, dalla notevole retrocessione della mica e mancanza di elementi essenziali colorati. Indizi di azioni dinamiche risentite dalla roccia si hanno nella frequente frantumazione del feldispato e del quarzo,

nelle non rare estinzioni ondulate di quest'ultimo e nell'aggregato microgranulare che circonda gli elementi di maggiore sviluppo.

Il feldispato sodico calcico ha anch'esso produzioni micacee ma meno abbondanti dell'ortose, sempre prevalente fra i feldispati; è di solito geminato secondo l'albite e molto di rado secondo Albite Carlsbad. Le estinzioni simmetriche alla traccia (010) mi hanno dato valori oscillanti 6°-8° e 8°-10° i quali attestano la presenza di termini oligoclasi-andesinici, confermata dalla prova del Becke che dà questo schema di rifrazione rispetto al quarzo:

$$\alpha' \geqq \omega \qquad \gamma' = \varepsilon \qquad \gamma' > \omega \qquad \alpha' < \varepsilon$$

La mica è muscovite, poco diffusa ma talora in lamine relativamente sviluppate, con forte assorbimento dei raggi paralleli alla direzione di più facile sfaldatura, spesso alterata e con bellissime inclusioni di tormalina, zircone, granato, epidoto, sitanite e microscopiche granulazioni magnetitiche, minerali quasi tutti accessori, i quali si ritrovano pure con la mica inclusi nel quarzo e nei feldispati specialmente ortoclasici.

La tormalina è in piccoli cristallini prismatici spesso pure ben terminati alle estremità, fortemente dicroici, e — sebbene minutissimi — sempre meglio individualizzati che non nelle sezioni della granitite. Il Marocchi, nella particolareggiata descrizione di questa roccia, tende a porre in evidenza la probabile origine pneumatolitica di questa tormalina.

Dalla seguente analisi risaltano le differenze chimiche e magmatiche fra questo granito minuto e la granitite descritta, e le corrispondenze notevoli con le analisi dei graniti aplitici riportate dall'Osann:

Risultato analisi	Analisi a 100	Rapporti molecolari	Rapporti molecolari	
			× 100	a 100
Perdita per arrov. 0,72	—			
SiO^2 73,62	74,01	1,2335	123,35	81,48
TiO^2 . . . . . tracce	—		—	—
Al^2O^3. 12,32	12,38	0,1214 } 0,1391	12,14	8,02
Fe^2O^3. 2,82	2,84	0,0177 }	1,77	1,17
FeO. 0,60	0,60	0,0083 }	0,83	0,55
CaO 0,61	0,61	0,0109 } 0,0264 }	1,09	0,72
MgO 0,51	0,51	0,0072 } } 0,1413	0,72	0,48
K^2O. 5,57	5,60	0,0596 } 0,1149 }	5,96	3,93
Na^2O 3,43	3,45	0,0553 }	5,53	3,65
100,20	100,00		151,39	100,00

Formula magmatica Loewinson-Lessing:
1,41 $\overline{R}O$; 1,39 R^2O^3 ; 12,33 $SiO^2 = 1,01\ \overline{R}O$; R^2O^3 ; 8,87 SiO^2
$R^2O : RO = 1 : 0,23$ $K^2O : Na^2O = 1 : 0,92$ $\alpha = 4,41$ $\beta = 22,7$

Formula magm. Osann:
$S_{81,48}\ A_{7,58}\ C_{0,44}\ F_{2,48}$
$N_{6,2}\ a_{14,43}\ c_{0,83}\ f_{4\ 72}$